INTEGRATION

1. Rappel

1. Définition

   Si f est une fonction continue sur un intervalle I, si a et b appartiennent à I et si F est une primitive de f, alors la valeur $F(b)-F(a)$ s'appelle intégrale de a à b de la fonction f, et se note $\int_a^b f(x)\,dx$.

   Remarque : La valeur $\int_a^b f(x)\,dx$ ne dépend pas de la primitive choisie pour la calculer. $F(b)-F(a)$ peut se noter aussi $[F(x)]_a^b$.

2. Propriété fondamentale

   Si f est une fonction positive, et si $a<b$ alors $\int_a^b f(x)\,dx$ représente l'aire délimitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisse et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.

   Remarque : $\int_a^b f(x)\,dx$ représente en quelque-sorte la somme des valeurs prises par la fonction f sur l'intervalle $[a;b]$.

2. Propriétés

1. Linéarité
   a. Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I et si a et b appartiennent à I, alors $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$.
   b. Si f est une fonction continue sur un intervalle I,si a et b appartiennent à I, alors pour tout réel k, $\int_a^b kf(x)\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx$.
2. Relation de Chasles

   Si f est une fonction continue sur un intervalle I et si a, b et c appartiennent à I, alors

   $\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx+\int_a^c f(x)\,dx$.
3. Ordre

   Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I, si a et b tels que $a\leq b$ appartiennent à I et si $f(x)<g(x)$ pour tout x de I, alors

   $\int_a^b f(x)\,dx<\int_a^b g(x)\,dx$.

3. Valeur moyenne d'une fonction

Le nombre $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ est appelé valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[a;b]$ (ou $[b;a]$ si $b>a$).