LOGARITHME

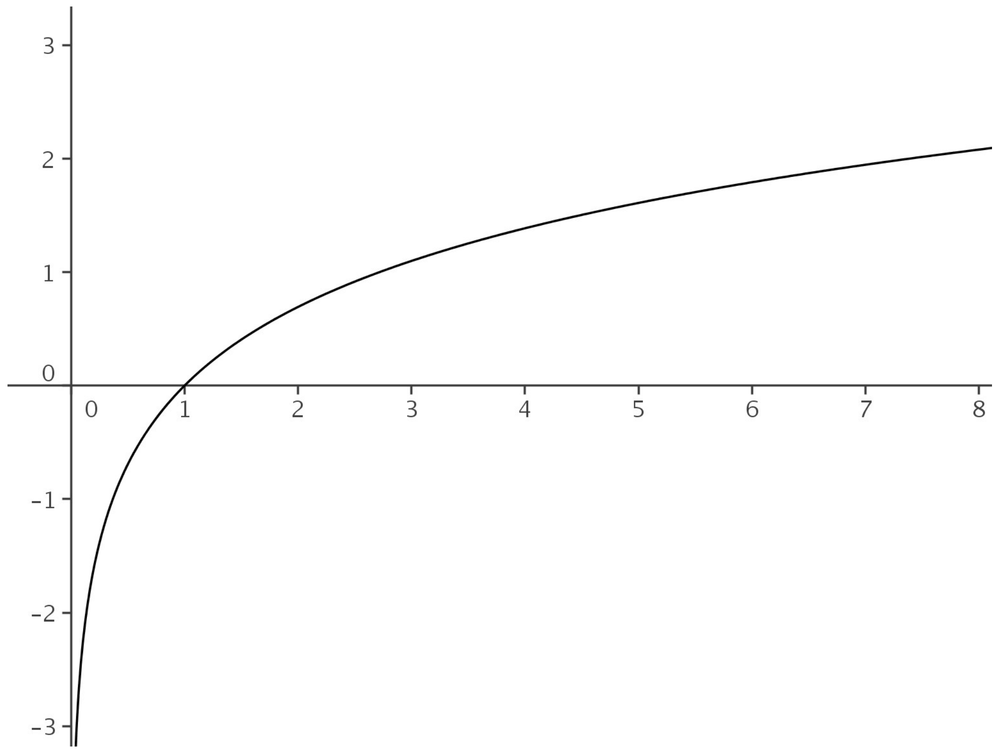
1. Définition

La fonction inverse est continue sur l'intervalle $]0;+\infty[$ donc elle admet des primitives sur cet intervalle. On appelle fonction logarithme népérien la primitive de la fonction inverse sur $]0;+\infty[$ qui s'annule pour $x=1$.

Remarque : cette définition revient à écrire $\ln(x)=\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$.

2. Fonction logarithme népérien

1. La fonction $x \to \ln(x)$ est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
2. $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to \cdot} \ln(x) = -\infty$
3. représentation graphique



3. Propriétés

1. Propriété fondamentale
   Pour tous réels a et b strictement positifs on a :
   $\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$
2. Conséquences
   Pour tous réels a et b strictement positifs on a :
   a. $\ln(\frac{1}{a})=-\ln(a)$
   b. $\ln(\frac{a}{b})=\ln(a)-\ln(b)$
   c. $\ln(x^n)=n\ \ln(x)$
   d. $\ln(\sqrt{x})=\frac{1}{2}\ln(x)$
3. Équations et inéquations
   Pour deux réels a et b strictement positifs
   a. $\ln(a)=\ln(b) \quad \Leftrightarrow \quad a=b$
   b. $\ln(a)\leq\ln(b) \quad \Leftrightarrow \quad a\leq b$ et $\ln(a)<\ln(b) \quad \Leftrightarrow \quad a<b$
   c. $\ln(a)<0 \quad \Leftrightarrow \quad a<1$ et $\ln(a)>0 \quad \Leftrightarrow \quad a>1$

4. nombre e

1. L'unique solution de l'équation $\ln(x)=1$ est noté e. Ce nombre ne peut pas être exprimé à l'aide nombres rationnels et des opérations usuelles. On a $e\simeq 2{,}718$.
2. pour tout entier n, $\ln(e^n)=n$.

5. Limites

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} x\ \ln(x)=0$$

Ces deux limites signifient que « x domine sur ln(x) »

6. Dérivées

1. Si u est une fonction à valeurs strictement positives et si f est la fonction définie par $f(x)=\ln(u(x))$, alors $f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$.
2. Réciproquement, si une fonction est de la forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$ avec u strictement positive, alors ses primitives sont de la forme $\ln(u(x))+c$.

7. Logarithme décimal

1. La fonction définie par $x\rightarrow\frac{\ln(x)}{\ln(10)}$ est appelé fonction logarithme décimal. Elle est notée log.
2. pour tout entier n, $\log(10^n)=n$
   La valeur log(x) est donc « La puissance à laquelle on doit élever 10 pour obtenir x »