TES mardi 6 janvier 2008

Devoir surveillé n°5
Type bac, durée 3 heures

Exercice 1 (5 points)
Commun à tous les élèves
Le système éducatif français est composé du 1er degré (écoles maternelles et primaires) et du 2^{ième} degré (collèges et lycées).
Le personnel assurant le fonctionnement est composé de personnel enseignant et de personnel non enseignant (administration, service…).
A la rentrée de 1999, on a les informations suivantes :

- 64% du personnel est enseignant.
- 40% du personnel est dans le 1er degré.
- 39% du personnel enseignant est dans le 1er degré.

On utilisera les notations suivantes pour désigner les événements :
E : « être enseignant »,
$\overline{E}$: « ne pas être enseignant ».
D_1 : « être dans le 1er degré ».
D_2 : « être dans le 2^{ième} degré ».
On choisit au hasard une personne, après justification, les résultats des calculs seront donnés sous forme décimale à 10^{-2} près.

1. Quelle est la probabilité pour un enseignant d'être dans le 1er degré ?
2. Quelle est la probabilité pour un enseignant d'être dans le 2^{ième} degré ?
3. Quelle est la probabilité pour une personne du système éducatif d'être dans le 1er degré ?
4. Quelle est la probabilité pour une personne d'être enseignante, sachant qu'elle est employée dans le 1er degré ?
5. Quelle est la probabilité pour une personne de ne pas être enseignante, sachant qu'elle est employée dans le 2^{ième} degré ?

Exercice 3 (5 points)
Pour les élèves ne suivant pas l'enseignement de spécialité
Dans un magasin, le nombre annuel de ventes d'un appareil électroménager, relevé pendant 6 années, est donné par le tableau suivant :

année	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Rang de l'année xi	1	2	3	4	5	6
Nombre d'appareils y_i	623	712	785	860	964	1073

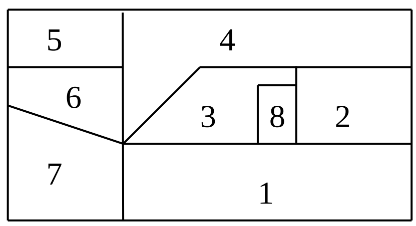
1. a) Représenter dans un repère orthogonal le nuage de points $M_i(x_i ; y_i)$ en prenant comme unités graphiques : 2 cm pour 1 rang en abscisses et 1 cm pour 50 appareils en ordonnées, en commençant à la graduation 600.
   b) Calculer en donnant les résultats arrondis à 10^{-2}, les coordonnées du point moyen G du nuage et placer ce point sur le graphique.

2. a) Calculer en donnant les résultats arrondis à 10^{-2}, les coordonnées du point moyen G_1 du nuage formé par les points M_1, M_2 et M_3, puis les coordonnées du point moyen G_2 du nuage formé par les points M_4, M_5 et M_6.
   b) Placer les points G_1 et G_2 sur le graphique et déterminer, avec les coefficients arrondis à 10^{-3}, une équation de la droite (G_2G_2).
   c) En utilisant cette droite comme droite d'ajustement affine, déterminer le nombre d'appareils que l'on peut prévoir vendre en 2009.

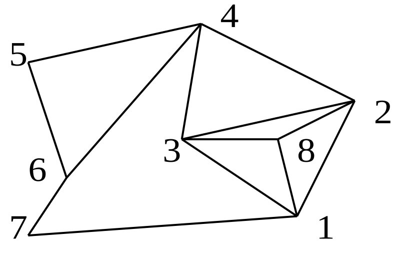
3. On sait maintenant que le nombre d'appareils vendus en 2007 est de 1125.
   a) Ajouter le point $M_7(7;1125)$ sur le graphique précédent.
   b) On considère alors le nouveau nuage formé des points M_i, $2 \leq i \leq 7$ (le nombre annuel de vente de l'année 2001 n'est plus pris en compte).
   Donner, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis à 10^{-3}).
   c) En utilisant cet ajustement, quel nombre d'appareils peut-on prévoir vendre en 2009 ?

Exercice 3 bis (5 points)
Pour les élèves suivant l'enseignement de spécialité

Huit pays sont représentés ci-dessous avec leurs frontières (un point seul ne constituant pas une frontière)



On représente cette situation à l'aide du graphe G suivant où les sommets représentent les pays, et les arêtes les frontières.



1. a) Quelle est la distance entre les sommets 1 et 5 ?
   b) Quel est le diamètre du graphe G ?

2. a) Est-il possible de partir d'un pays et d'y revenir après avoir franchi chaque frontière une fois et une seule ?
   b) Est-il possible de partir d'un pays, de franchir chaque frontière une fois et une seule et de terminer dans un autre pays ?

3. a) A la suite de problèmes politiques, les pays 1,2 et 8 décident de se regrouper au sein d'une fédération de même que les pays 4 et 6. On notera les maintenant les pays précédents A, B, C, D et E de la façon suivante :
   1,2,8 → A ; 3 → B ; 4,6 → C ; 5 → D ; 7 → E
   Construire le graphe représentant cette nouvelle situation et donner une matrice associée à ce graphe.
   b) De combien de façons peut-on aller du pays A au pays D en traversant 6 fois une frontière ? Répondre en utilisant une puissance de la matrice précédente.

Exercice 4 (10 points)
Commun à tous les élèves
Partie A
On considère la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x)=ax+b+3\ln(x+1)$ où a et b désignent 2 réels que l'on déterminera à la question 2.
On appelle C_f sa courbe représentative. La figure donnée en annexe représente une partie de cette courbe donnée par une calculatrice graphique.
C_f vérifie les conditions suivantes : Elle passe par le point $A(0;5)$ et elle admet une tangente horizontale au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

1. En utilisant les données de l'énoncé, que peut-on dire du sens de variation de f ?

2. Déterminer a et b

Partie B
On suppose désormais que la fonction f est définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x)=-2x+5+3\ln(x+1)$.

1. a) Calculer la limite de f en -1 . Interpréter graphiquement le résultat.
   b) en admettant que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x}=0$, calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. Calculer $f'(x)$, Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations. Préciser la valeur exacte du maximum de f.

3. Tracer C_f et les asymptotes éventuelles dans un plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques 2cm).

4. a) Montrer qu'il existe 2 réels α et β tels que $\alpha \leq 0 \leq \beta$ et $f(\alpha) = f(\beta) = 0$.
   b) Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de α et β .
   c) En déduire le signe de f sur $]-1 ; +\infty[$.

5. soit g la fonction définie sur $]-1 ; +\infty[$ par $g(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$.
   a) Calculer $g'(x)$.
   b) En déduire l'expression de la primitive de f s'annulant pour x = 0.

Partie C

Une imprimerie a une capacité d'impression de 5000 ouvrages par jour. Une étude a montré que le coût marginal peut être modélisé par $f(q)$ (en millier d'euros) où q désigne la quantité d'ouvrages imprimé (en milliers). On rappelle que le coût marginal correspond à la dérivée du coût total.

1. a) Calculer $\int_0^5 f(q) dq$
   b) En déduire le coût total en euros de la fabrication de 5000 ouvrages.

2. L'imprimeur compte réaliser en deux jours une commande 8000 ouvrages. Il hésite entre deux possibilités :
   5000 ouvrages le premier jour puis 3000 le second.
   4000 ouvrages pendant deux jours.
   Quelle est l'option la plus rentable ?

Annexe