Baccalauréat S 2009

L'intégrale de septembre 2008 à juin 2009

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

Baccalauréat S Antilles-Guyane septembre 2008

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Certains résultats de la PARTIE A pourront être utilisés dans la PARTIE B, mais les deux parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

PARTIE A :

On définit :

- la suite (u_n) par : $u_0 = 13$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$.
- la suite (S_n) par : pour tout entier naturel n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$.
   En déduire la limite de la suite (u_n).
2. **a.** Déterminer le sens de variation de la suite (S_n).
   b. Calculer S_n en fonction de n.
   c. Déterminer la limite de la suite (S_n).

PARTIE B :

Étant donné une suite (x_n), de nombres réels, définie pour tout entier naturel n, on considère la suite (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$.

Indiquer pour chaque proposition suivante si elle est vraie ou fausse.
Justifier dans chaque cas.

Proposition 1 : si la suite (x_n) est convergente, alors la suite (S_n) l'est aussi.
Proposition 2 : les suites (x_n) et (S_n) ont le même sens de variation.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation díinconnue z :

$$z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0.$$

2. On considère les points A d'affixe $z_\text{A} = \sqrt{3} - \text{i}$, B d'affixe $z_\text{B} = \sqrt{3} + \text{i}$ et C le milieu de [OB] d'affixe z_C.
   a. Déterminer la forme exponentielle de z_A, z_B et z_C.
   b. Sur une figure, placer les points A, B et C, en prenant 2 cm pour unité.
   c. Montrer que le triangle OAB est équilatéral.
3. Soit D l'image de C par la rotation r de centre O, d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et E l'image de D par la translation t de vecteur $2\vec{v}$.

a. Placer les points D et E sur une figure.

b. Montrer que l'affixe z_{E} du point E vérifie : $z_{\text{E}} = \dfrac{1}{2}\left[1+\text{i}\left(4-\sqrt{3}\right)\right]$.

c. Montrer que $\text{OE} = \text{BE} = \sqrt{5-2\sqrt{3}}$.

4. Montrer que les points A, C et E sont alignés.

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

EXERCICE 2 — 5 points

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A :

On considère le système de congruences :

$$(S)\left\{\begin{array}{lcll} n & \equiv & 2 & \text{(modulo 3)}\\ n & \equiv & 1 & \text{(modulo 5)}\end{array}\right., \text{ où } n \text{ désigne un entier relatif.}$$

1. Montrer que 11 est solution de (S).

2. Montrer que si n est solution de (S) alors $n-11$ est divisible par 3.

3. Montrer que les solutions de (S) sont tous les entiers de la forme $11+15k$, où k désigne un entier relatif.

PARTIE B :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On considère l'application f du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point d'affixe z' et g celle qui à tout point M d'affixe z associe le point d'affixe z'' définies par :

$$z' = \frac{1+\text{i}\sqrt{3}}{2}z \quad \text{et} \quad z'' = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{5}}z.$$

1. Préciser la nature et les éléments caractéristiques des applications f et g.

2. On considère les points A_0 et B_0 d'affixes respectives $a_0 = 2\text{e}^{-2\text{i}\frac{\pi}{3}}$ et $b_0 = 4\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{5}}$.

Soient (A_n) et (B_n) les suites de points définies par les relations de récurrences :

$$A_{n+1} = f\left(A_n\right) \quad \text{et} \quad B_{n+1} = g\left(B_n\right).$$

On note a_n et b_n les affixes respectives de A_n et B_n.

a. Quelle est la nature de chacun des triangles $\text{O}A_nA_{n+1}$?

b. En déduire la nature du polygone $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$.

3. a. Montrer que les points B_n sont situés sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

b. Indiquer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{O}B_n}, \overrightarrow{\text{O}B_{n+2}}\right)$.

c. En déduire la nature du polygone $B_0B_2B_4B_6B_8$.

4. a. Exprimer a_n et b_n en fonction de n.

b. Montrer que les entiers n pour lesquels les points A_n et B_n sont simultanément sur l'axe des réels sont les solutions du système (S) de la PARTIE A.

EXERCICE 3 **7 points**
Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x+2-\frac{4\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+3}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   b. Démontrer que la droite $\mathscr{D}_1$ d'équation $y = x+2$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
   c. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}_1$.
2. a. On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$ et montrer que, pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = \left(\frac{\mathrm{e}^x-3}{\mathrm{e}^x+3}\right)^2$$

   b. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations de la fonction f.
3. a. Que peut-on dire de la tangente $\mathscr{D}_2$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point I d'abscisse $\ln 3$?
   b. En utilisant les variations de la fonction f, étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}_2$.
4. a. Montrer que la tangente $\mathscr{D}_3$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation : $y = \frac{1}{4}x+1$.
   b. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la tangente $\mathscr{D}_3$ sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ \ln 3]$.
   On pourra utiliser la dérivée seconde de f notée f'' définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par :

$$f''(x) = \frac{12\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x-3\right)}{\left(\mathrm{e}^x+3\right)^3}.$$

5. On admet que le point I est centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.
   Tracer la courbe $\mathscr{C}$, les tangentes $\mathscr{D}_3$, $\mathscr{D}_3$ et les asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$. On rappelle que l'unité graphique choisie est 2 cm.
6. a. Déterminer une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+3}$.
   b. Soit λ un réel strictement négatif.
   On note $\mathscr{A}(\lambda)$ l'aire, en unités d'aire, du domaine limité par $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 0$.
   Montrer que $\mathscr{A}(\lambda) = 4\ln 4 - 4\ln\left(\mathrm{e}^\lambda+3\right)$.
   c. Calculer $\displaystyle\lim_{\lambda\to-\infty} \mathscr{A}(\lambda)$.

EXERCICE 4 **4 points**
Commun à tous les candidats

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient 2 billes vertes et 8 billes rouges toutes indiscernables au toucher.

L'urne U_2 contient 3 billes vertes et 7 billes rouges toutes indiscernables au toucher.

Une partie consiste, pour un joueur, à tirer au hasard une bille de l'urne U_1, noter sa couleur et remettre la bille dans l'urne U_1 puis de tirer au hasard une bille de l'urne U_2, noter sa couleur et remettre la bille dans l'urne U_2.
À la fin de la partie, si le joueur a tiré deux billes vertes il gagne un lecteur MP3. S'il a tiré une bille verte, il gagne un ours en peluche. Sinon il ne gagne rien.
On note

V_1 l'évènement : « le joueur tire une boule verte dans U_1 »

V_2 l'évènement : « le joueur tire une boule verte dans U_2 ».

Les évènements V_1 et V_2 sont indépendants.

1. Montrer, à l'aide d'un arbre pondéré, que la probabilité de gagner un lecteur MP3 est $p = 0,06$.
2. Quelle est la probabilité de gagner un ours en peluche ?
3. Vingt personnes jouent chacune une partie. Déterminer la probabilité que deux d'entre elles exactement gagnent un lecteur MP3.

   On justifiera la réponse et on donnera une valeur approchée du résultat à 10^{-4} près.
4. On appelle n le nombre de personnes participant à la loterie un jour donné et jouant une seule fois.

   On note p_n la probabilité que l'une au moins de ces personnes gagne un lecteur MP3.

   Déterminer la plus petite valeur de n vérifiant $p_n \geqslant 0,99$.

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Métropole & La Réunion ∾ septembre 2008

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Dans une kermesse un organisateur de jeux dispose de 2 roues de 20 cases chacune.
La roue A comporte 18 cases noires et 2 cases rouges.
La roue B comporte 16 cases noires et 4 cases rouges.
Lors du lancer d'une roue toutes les cases ont la même probabilité d'être obtenues.
La règle du jeu est la suivante :

- Le joueur mise 1 € et lance la roue A.
- S'il obtient une case rouge, alors il lance la roue B, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.
- S'il obtient une case noire, alors il relance la roue A, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

2. Soient E et F les évènements :

E : « à l'issue de la partie, les 2 cases obtenues sont rouges » ;
F : « à l'issue de la partie, une seule des deux cases est rouge ».

Montrer que $p(\text{E}) = 0,02$ et $p(\text{F}) = 0,17$.

3. Si les 2 cases obtenues sont rouges le joueur reçoit 10 € ; si une seule des cases est rouge le joueur reçoit 2 € ; sinon il ne reçoit rien.

X désigne la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros du joueur (rappel le joueur mise 1 €).

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance mathématique de X et en donner une interprétation.

4. Le joueur décide de jouer n parties consécutives et indépendantes (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2)

a. Démontrer que la probabilité p_n qu'il lance au moins une fois la roue B est telle que $p_n = 1-(0,9)^n$.

b. Justifier que la suite de terme général p_n est convergente et préciser sa limite.

c. Quelle est la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $p_n > 0,9$?

EXERCICE 2 **3 points**

Commun à tous les candidats

On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ vérifiant l'équation différentielle

$$(E)\quad :\qquad xf'(x)-(2x+1)f(x) = 8x^2.$$

1. **a.** Démontrer que si f est solution de (E) alors la fonction g définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ est solution de l'équation différentielle $(E')\quad :\quad y' = 2y+8$.

b. Démontrer que si h est solution de (E') alors la fonction f définie par $f(x) = xh(x)$ est solution de (E).

2. Résoudre (E') et en déduire toutes les solutions de (E),

3. Existe-t-il une fonction f solution de l'équation différentielle (E) dont la représentation graphique dans un repère donné passe par le point $\text{A}(\ln 2\ ;\ 0)$? Si oui la préciser.

EXERCICE 3 — 4 points

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).

Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, la lettre correspondant à la réponse choisie. Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

Dans le plan orienté, ABCD est un carré direct $\left(\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}\right) = \dfrac{\pi}{2}\right)$. On note I son centre et J le milieu de [AI].

1. C est le barycentre des points pondérés (A, m), (B, 1) et (D, 1) lorsque :

a. $m = -2$ **b.** $m = 2$ **c.** $m = -1$ **d.** $m = 3$

2.

a. B est l'image de C par la rotation de centre I et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

b. Le rapport de l'homothétie de centre C qui transforme I en J est $\dfrac{2}{3}$.

c. Le triangle DAB est invariant par la symétrie de centre I.

d. J est l'image de I par la translation de vecteur $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{BA}} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\text{DB}}$.

3. L'ensemble des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{M\text{C}}\right\| = \text{AB}$ est :

a. la médiatrice de [AC].

b. le cercle circonscrit au carré ABCD.

c. la médiatrice de [AI].

d. le cercle inscrit dans le carré ABCD.

4. L'ensemble des points M du plan tels que :

$$\left(2\overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{D}}\right) \cdot \left(\overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{C}}\right) = 0$$

est :

a. la médiatrice de [AC].

b. le cercle circonscrit au carré ABCD.

c. la médiatrice de [AI].

d. le cercle inscrit dans le carré ABCD.

EXERCICE 4 — 4 points

Commun à tous les candidats

On considère la suite numérique (J_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par

$$J_n = \int_1^n \text{e}^{-t}\sqrt{1+t}\,\text{d}t.$$

1. Démontrer que la suite (J_n) est croissante.

2. *Dans cette question, le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.*

On définit la suite (I_n), pour tout entier naturel n non nul, par :

$$I_n = \int_1^n (t+1)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

a. Justifier que, pour tout $t \geqslant 1$, on a $\sqrt{t+1} \leqslant t+1$.

b. En déduire que $J_n \leqslant I_n$.

c. Calculer I_n en fonction de n. En déduire que la suite (J_n) est majorée par un nombre réel (indépendant de n).

d. Que peut-on en conclure pour la suite (J_n) ?

EXERCICE 5 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On réalisera une figure en prenant 2 cm comme unité graphique sur chaque axe.
On considère les points A, B et I d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = 1$, $z_{\mathrm{B}} = 5$ et $z_{\mathrm{I}} = 3+\mathrm{i}$.
On note $(\mathscr{C})$ le cercle de centre O et de rayon 1, (Δ) la médiatrice de [AB] et (T) la tangente au cercle $(\mathscr{C})$ en A.
À tout point M d'affixe z, différent de A, on associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{z-5}{z-1}.$$

Le point M' est appelé l'image de M.

Partie A

1. Déterminer sous forme algébrique l'affixe du point I$'$ image de I.
Vérifier que I$'$ appartient à $(\mathscr{C})$.

2. **a.** Justifier que pour tout point M distinct de A et B, on a : $\mathrm{O}M' = \dfrac{M\mathrm{B}}{M\mathrm{A}}$.

b. Justifier que pour tout point M distinct de A et B, on a :
$\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{O}M'}\right) = \left(\overrightarrow{M\mathrm{A}},\ \overrightarrow{M\mathrm{B}}\right)$.

Partie B

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Dans la suite de l'exercice, M désigne un point quelconque de (Δ). On cherche à construire géométriquement son image M'.

1. Démontrer que M' appartient à $(\mathscr{C})$.

2. On note (d) la droite symétrique de la droite $(\mathrm{A}M)$ par rapport à la tangente (T). (d) recoupe $(\mathscr{C})$ en N.

a. Justifier que les triangles AMB et AON sont isocèles.
Après avoir justifié que $\left(\overrightarrow{\mathrm{AO}},\ \overrightarrow{\mathrm{A}N}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{A}M},\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$ démontrer que
$\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{O}N}\right) = \left(\overrightarrow{M\mathrm{A}},\ \overrightarrow{M\mathrm{B}}\right)$.

b. En déduire une construction de M'.

EXERCICE 5 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
On réalisera une figure en prenant 4 cm comme unité graphique sur chaque axe.
On considère le point A d'affixe $z_{\text{A}} = 1$.

Partie A

k est un réel strictement positif ; f est la similitude directe de centre O de rapport k et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.
On note $\text{A}_0 = \text{A}$ et pour tout entier naturel n, $A_{n+1} = f\left(A_n\right)$.

1. **a.** Étant donné un point M d'affixe z, déterminer en fonction de z l'affixe z' du point M' image de M par f.

   b. Construire les points A_0, A_1, A_2 et A_3 dans le cas particulier où k est égal à $\dfrac{1}{2}$.

2. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier n, l'affixe z_n du point A_n est égale à $k^n \text{e}^{\frac{\text{i}n\pi}{3}}$.

   b. En déduire les valeurs de n pour lesquelles le point A_n appartient à la demi droite $\left[\text{O}\,;\, \overrightarrow{u}\right)$ et, dans ce cas, déterminer en fonction de k et de n l'abscisse de A_n.

Partie B

Dans cette partie toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Désormais, k désigne un entier naturel non nul.

1. Donner la décomposition en facteurs premiers de 2008.
2. Déterminer, en expliquant la méthode choisie, la plus petite valeur de l'entier naturel k pour laquelle k^6 est un multiple de 2008.
3. Pour quelles valeurs des entiers n et k le point A_n appartient-il à la demi droite $\left[\text{O}\,;\, \overrightarrow{u}\right)$ avec pour abscisse un nombre entier multiple de 2008 ?

Durée : 4 heures

Baccalauréat S (obligatoire) Polynésie septembre 2008

EXERCICE 1 **4 points**

On rappelle que la probabilité d'un évènement A sachant que l'évènement B est réalisé se note $p_B(A)$.

Une urne contient au départ 30 boules blanches et 10 boules noires indiscernables au toucher.

On tire au hasard une boule de l'urne :

- si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et on ajoute n boules blanches supplémentaires.
- si la boule tirée est noire, on la remet dans l'urne et on ajoute n boules noires supplémentaires.

On tire ensuite au hasard une seconde boule de l'urne.

On note :

- B_1 l'évènement : « on obtient une boule blanche au premier tirage »
- B_2 l'évènement : « on obtient une boule blanche au second tirage »
- A l'évènement : « les deux boules tirées sont de couleurs différentes ».

1. Dans cette question, on prend $n = 10$.

   a. Calculer la probabilité $p(B_1 \cap B_2)$ et montrer que $p(B_2) = \dfrac{3}{4}$.

   b. Calculer $p_{B_2}(B_1)$.

   c. Montrer que $p(A) = \dfrac{3}{10}$.

2. On prend toujours $n = 10$.

Huit joueurs réalisent l'épreuve décrite précédemment de manière identique et indépendante.

On appelle X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de réalisations de l'évènement A.

   a. Déterminer $p(X = 3)$. (On donnera la réponse à 10^{-2} près).

   b. Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

3. Dans cette question n est un entier supérieur ou égal à 1.

Existe-t-il une valeur de n pour laquelle $p(A) = \dfrac{1}{4}$?

EXERCICE 2 **5 points**

On donne la propriété suivante :

« par un point de l'espace il passe un plan et un seul orthogonal à une droite donnée »

Sur la figure donnée en annexe, on a représenté le cube ABCDEFGH d'arête 1.

On a placé :

les points I et J tels que $\overrightarrow{\text{BI}} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\text{BC}}$ et $\overrightarrow{\text{EJ}} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\text{EH}}$.

le milieu K de [IJ].

On appelle P le projeté orthogonal de G sur le plan (FIJ).

Partie A

1. Démontrer que le triangle FIJ est isocèle en F.
   En déduire que les droites (FK) et (IJ) sont orthogonales.

   On admet que les droites (GK) et (IJ) sont orthogonales.
2. Démontrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (FGK).
3. Démontrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (FGP).
4. **a.** Montrer que les points F, G, K et P sont coplanaires.
   b. En déduire que les points F, P et K sont alignés.

Partie B

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{A} ; \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.
On appelle N le point d'intersection de la droite (GP) et du plan (ADB).
On note $(x ; y ; 0)$ les coordonnées du point N.

1. Donner les coordonnées des points F, G, I et J.
2. **a.** Montrer que la droite (GN) est orthogonale aux droites (FI) et (FJ).
   b. Exprimer les produits scalaires $\overrightarrow{\text{G}N} \cdot \overrightarrow{\text{FI}}$ et $\overrightarrow{\text{G}N} \cdot \overrightarrow{\text{FJ}}$ en fonction de x et y.
   c. Déterminer les coordonnées du point N.
3. Placer alors le point P sur la figure en annexe.

EXERCICE 3 **5 points**

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

On considère l'ensemble (E) des suites (x_n) définies sur $\mathbb{N}$ et vérifiant la relation suivante :
pour tout entier naturel n non nul, $x_{n+1} - x_n = 0,24 x_{n-1}$.

1. On considère un réel λ non nul et on définit sur $\mathbb{N}$ la suite (t_n) par $t_n = \lambda^n$.
   Démontrer que la suite (t_n) appartient à l'ensemble (E) si et seulement si λ est solution de l'équation $\lambda^2 - \lambda - 0,24 = 0$.
   En déduire les suites (t_n) appartenant à l'ensemble (E).
   On admet que (E) est l'ensemble des suites (u_n) définies sur $\mathbb{N}$ par une relation de la forme :
   $$u_n = \alpha(1,2)^n + \beta(-0,2)^n \quad \text{où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont deux réels.}$$
2. On considère une suite (u_n) de l'ensemble (E).
   Déterminer les valeurs de α et β telles que $u_0 = 6$ et $u_1 = 6,6$.
   En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{39}{7}(1,2)^n + \dfrac{3}{7}(-0,2)^n$.
3. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Partie B

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$v_0 = 6 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = 1,4 v_n - 0,05 v_n^2$$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1,4x - 0,05x^2$.
   a. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 8]$.

b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,
$0 \leqslant v_n < v_{n+1} \leqslant 8$.

2. En déduire que la suite (v_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ.

EXERCICE 4 **6 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^{-x}\right).$$

La courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction f dans un repère orthogonal est donnée en annexe.

Partie A - Étude de fonction *f*.

1. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = x + \ln\left(1 + 2\mathrm{e}^{-2x}\right)$.
On admet que, pour tout réel x, $f(x) = -x + \ln\left(2 + \mathrm{e}^{2x}\right)$.

2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et montrer que la droite (d) d'équation $y = x$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.
Étudier la position relative de $(\mathscr{C})$ et de (d).

3. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et montrer que la droite (d$'$) d'équation $y = -x + \ln 2$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.

4. Étudier les variations de la fonction f.
Montrer que le minimum de la fonction f est égal à $\dfrac{3}{2}\ln 2$.

5. Tracer les droites (d) et (d$'$) sur la feuille annexe.

Partie B - Encadrement d'une intégrale.

On pose $I = \displaystyle\int_2^3 [f(x) - x]\,\mathrm{d}x$.

1. Donner une interprétation géométrique de I.

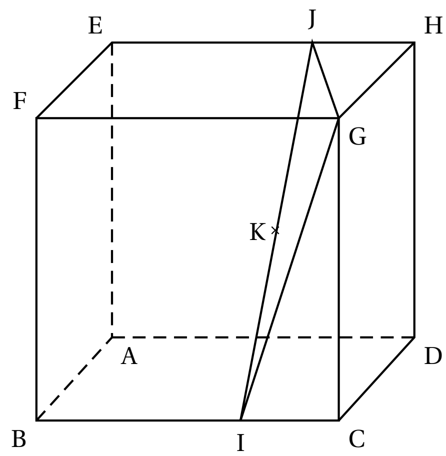
2. Montrer que, pour tout $X \in [0\ ;\ +\infty[$, $\ln(1 + X) \leqslant X$.

3. En déduire que $0 \leqslant I \leqslant \displaystyle\int_2^3 2\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$ et donner un encadrement de I d'amplitude 0,02.

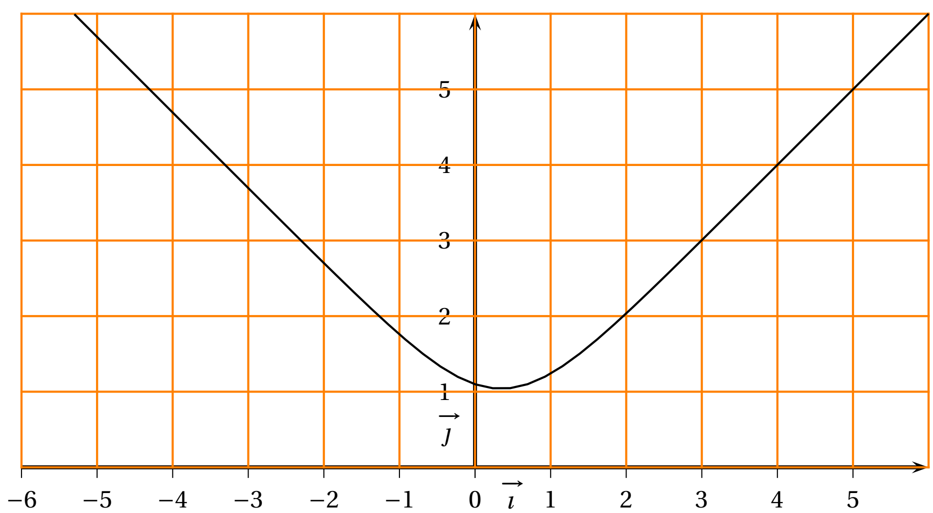
Annexe

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

EXERCICE 2



EXERCICE 4



Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie novembre 2008 ∾

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ on considère les points :

A(3 ; −2 ; 1) B(5 ; 2 ; −3)
C(6 ; −2 ; −2) D(4 ; 3 ; 2)

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés, puis que le triangle ABC est isocèle et rectangle.
2. **a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}\,(2\,;\,1\,;\,2)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   b. En déduire une équation du plan (ABC).
   c. Montrer que la distance du point D au plan (ABC) est égale à 3.
3. Calculer le volume du tétraèdre ABCD en unités de volume.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_{\text{A}} = 2+2\text{i}$, $z_{\text{B}} = 2\text{i}$ et $z_{\text{C}} = 2$ ainsi que le cercle Γ de centre A et de rayon 2.
   La droite (OA) coupe le cercle Γ en deux points H et K tels que OH < OK. On note z_{H} et z_{K} les affixes respectives des points H et K,
   a. Faire une figure en prenant 1 cm comme unité graphique.
   b. Calculer la longueur OA. En déduire les longueurs OK et OH.
   c. Justifier, à l'aide des notions de module et d'argument d'un nombre complexe, que

$$z_{\text{K}} = \left(2\sqrt{2}+2\right)\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}} \quad z_{\text{H}} = \left(2\sqrt{2}-2\right)\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}.$$

   Dans toute la suite, on considère l'application f du plan qui à tout point M d'affixe $z \neq 0$ associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{-4}{z}.$$

2. **a.** Déterminer et placer les points images de B et C par f.
   b. On dit qu'un point est invariant par f s'il est confondu avec son image. Déterminer les points invariants par f.
3. **a.** Montrer que pour tout point M distinct de O, on a :

$$\text{O}M \times \text{O}M' = 4.$$

   b. Déterminer $\arg\left(z'\right)$ en fonction de $\arg(z)$.
4. Soient K′ et H′ les images respectives de K et H par f.
   a. Calculer OK′ et OH′.

b. Démontrer que $z_{K'} = \left(2\sqrt{2}-2\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$ et $z_{H'} = \left(2\sqrt{2}+2\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$.

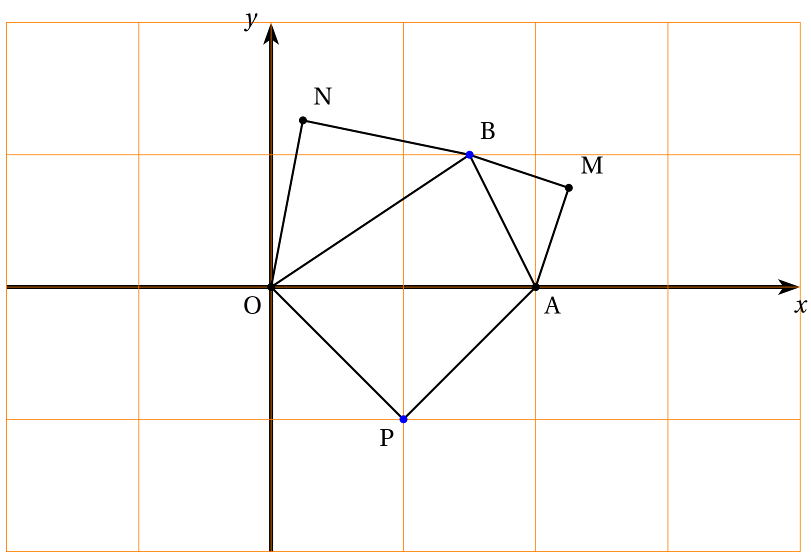
c. Expliquer comment construire les points K′ et H′ en utilisant uniquement la règle et le compas à partir des points K et H. Réaliser la construction.

EXERCICE 2 — 5 points

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}~;~\overrightarrow{\mathrm{OI}}~;~\overrightarrow{\mathrm{OJ}}\right)$. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2$ et $z_B = \dfrac{3}{2} + \mathrm{i}$.

On considère les points M, N et P tels que les triangles AMB, BNO et OPA soient des triangles rectangles isocèles de sens direct comme le montre la figure ci-dessous.



On note s_1 la similitude directe de centre A qui transforme M en B.

On note s_2 la similitude directe de centre O qui transforme B en N. On considère la transformation $r = s_2 \circ s_1$.

Le but de l'exercice est de démontrer de deux façons différentes que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

1. À l'aide des transformations

a. Donner l'angle et le rapport de s_1 et de s_2.

b. Déterminer l'image du point M puis celle du point I par la transformation r.

c. Justifier que r est une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ dont on précisera le centre.

d. Quelle est l'image du point O par r ?

e. En déduire que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

2. En utilisant les nombres complexes

a. Donner les écritures complexes de s_1 et s_2. On utilisera les résultats de la question 1. a.

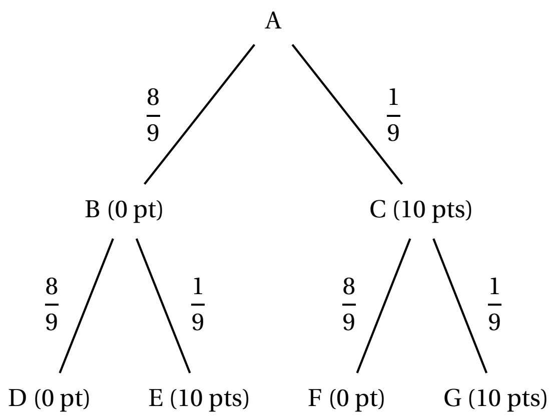
b. En déduire les affixes z_M et z_N des points M et N.

c. Donner, sans justification, l'affixe z_P du point P puis démontrer que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Un joueur lance une bille qui part de A puis emprunte obligatoirement une des branches indiquées sur l'arbre ci-dessous pour arriver à l'un des points D, E, F et G.



On a marqué sur chaque branche de l'arbre la probabilité pour que la bille l'emprunte après être passé par un nœud.
Les nombres entre parenthèses indiquent les points gagnés par le joueur lors du passage de la bille. On note X la variable aléatoire qui correspond au nombre total de points gagnés à l'issue d'une partie c'est-à-dire une fois la bille arrivée en D, E, F ou G.

1. Dans cette question, les résultats sont attendus sous forme fractionnaire.
   a. Déterminer la loi de probabilité de X.
   b. Calculer l'espérance de X.
   c. Calculer la probabilité que la bille ait suivi la branche AC sachant que le joueur a obtenu exactement 10 points.
2. Le joueur effectue 8 parties et on suppose que ces huit parties sont indépendantes. On considère qu'une partie est gagnée si le joueur obtient 20 points à cette partie.
   a. Calculer la probabilité qu'il gagne exactement 2 parties. On donnera le résultat arrondi au millième
   b. Calculer la probabilité qu'il gagne au moins une partie. On donnera le résultat arrondi au millième.

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

PARTIE A

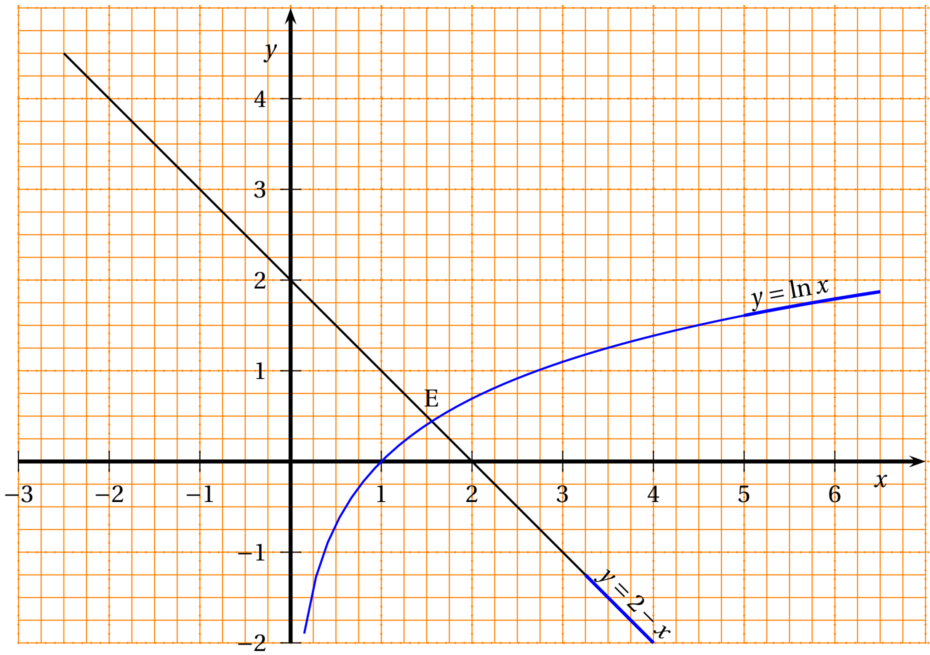
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \ln x - 2 + x.$$

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f puis dresser son tableau de variations.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
   Donner un encadrement du nombre α à 10^{-2} près.

PARTIE B

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On considère sur le graphique ci-dessous, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction ln, ainsi que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 2 - x$. On note E le point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.



On considère l'aire en unités d'aire, notée $\mathscr{A}$, de la partie du plan située au dessus de l'axe des abscisses et au dessous de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

1. Déterminer les coordonnées du point E.
2. Soit $I = \displaystyle\int_1^{\alpha} \ln x \, \mathrm{d}x$.
   a. Donner une interprétation géométrique de I.
   b. Calculer I, en fonction de α, à l'aide d'une intégration par parties.
   c. Montrer que I peut aussi s'écrire $I = -\alpha^2 + \alpha + 1$ sachant que $f(\alpha) = 0$.
3. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ en fonction de α.

EXERCICE 5 **3 points**
Commun à tous les candidats

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}.$$

1. **Restitution organisée de connaissances :**
   La fonction exponentielle est l'unique fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\left\{\begin{array}{lcll} g'(x) & = & g(x) & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \\ g(0) & = & 1 & \end{array}\right.$$

   Démontrer que $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = 1$.

2. Déterminer la limite de la fonction f en 0.
3. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

PARTIE B

Soit (u_n) la suite définie pour n entier supérieur ou égal à 1 par :

$$u_n = \frac{1}{n}\left[1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} + \mathrm{e}^{\frac{2}{n}} + \cdots + \mathrm{e}^{\frac{n-1}{n}}\right]$$

1. Démontrer que $1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} + \mathrm{e}^{\frac{2}{n}} + \cdots + \mathrm{e}^{\frac{n-1}{n}} = \dfrac{1-\mathrm{e}}{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}$ puis en déduire que $u_n = (\mathrm{e}-1)f\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
2. En déduire, en utilisant aussi la **PARTIE A**, que la suite (u_n) converge vers $\mathrm{e}-1$.

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Amérique du Sud novembre 2008

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

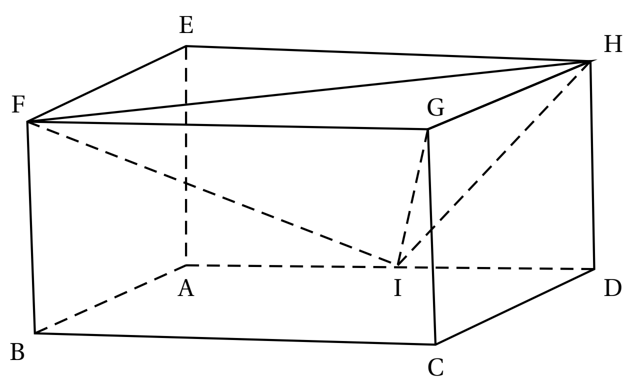
Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A, B, C d'affixes respectives $a = -1 + 2\text{i}$, $b = 1 + 3\text{i}$, $c = 4\text{i}$.

1. Montrer que le triangle ABC est isocèle en A.
2. Soit I le milieu de [BC] et z_{I} son affixe.
   a. Quel est l'ensemble des points M du plan distincts de A dont l'affixe z est telle que $\dfrac{z - z_{\text{I}}}{z - a}$ soit un réel ?
   b. Déterminer l'unique réel x tel que $\dfrac{x - z_{\text{I}}}{x - a}$ soit un réel.
   c. Soit $z_{\overrightarrow{\text{AI}}}$ l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\text{AI}}$, donner une forme trigonométrique de $z_{\overrightarrow{\text{AI}}}$.
3. a. Soit G le point d'affixe -3. Montrer qu'il existe deux rotations de centre G, dont on déterminera les angles, telles que les images de A et I par ces rotations soient toutes deux sur l'axe des réels.
   b. Soit r_1 la rotation de centre G et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{4}$.
   Déterminer l'écriture complexe de r_1.
4. Soit A$'$, B$'$ et C$'$ les images respectives de A, B, et C par la rotation r_1 ; soient a', b' et c' leurs affixes.
   Quelle est l'image par r_1 de l'axe de symétrie du triangle ABC ?
   En déduire que $b' = \overline{c'}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Une unité de longueur étant choisie dans l'espace, on considère un pavé droit ABCDEFGH tel que : AB = 1, AD = 2 et AE = 1.
On appelle I le milieu de [AD].



L'espace est muni du repère orthonormé $\left(\text{A} ; \overrightarrow{\text{AB}} ; \overrightarrow{\text{AI}} ; \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

1. Déterminer, dans le repère choisi, les coordonnées des points F, G, H.
2. a. Montrer que le volume V du tétraèdre GFIH est égal à $\dfrac{1}{3}$.

b. Montrer que le triangle FIH est rectangle en I.
En exprimant V d'une autre façon, calculer la distance d du point G au plan (FIH).

3. Soit le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(2~;~1~;~-1)$.

a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (FIH).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (FIH).

c. Retrouver par une autre méthode la distance d du point G au plan (FIH).

4. a. La droite (AG) est-elle perpendiculaire au plan (FIH) ?

b. Donner un système d'équations paramétriques de cette droite.

c. Déterminer les cordonnées du point d'intersection K de (AG) et de (FIH).

5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse sera prise en considération dans l'évaluation.*
Soit Γ la sphère de centre G passant par K.
Quelle est la nature de l'intersection de Γ et du plan (FIH) ?
(On ne demande pas de préciser les éléments caractérisant cette intersection)

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O},~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath},~\overrightarrow{k}\right)$.
Soit D la droite passant par le point A de coordonnées $(0~;0~;2)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(1~;1~;0)$ et soit D' la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{rcr} x &=& t' \\ y &=& -t' \\ z &=& -2 \end{array}\right. \quad (t' \in \mathbb{R})$$

Le but de l'exercice est d'étudier l'ensemble S des points de l'espace équidistants de D et de D'.

1. Une équation de S

a. Montrer que D et D' sont orthogonales et non coplanaires.

b. Donner une représentation paramétrique de la droite D.
Soit M un point de l'espace de coordonnées $(x~;~y~;~z)$ et H le projeté orthogonal de M sur D. Montrer que $\overrightarrow{MH}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{-x+y}{2}~;~\dfrac{x-y}{2}~;~2-z\right)$.
En déduire MH^2 en fonction de x, y et z.
Soit K le projeté orthogonal de M sur D'. Un calcul analogue au précédent permet d'établir que : $MK^2 = \dfrac{(x+y)^2}{2} + (2+z)^2$, relation que l'on ne demande pas de vérifier.

c. Montrer qu'un point M de coordonnées $(x~;~y~;~z)$ appartient à S si et seulement si $z = -\dfrac{1}{4}xy$.

2. Étude de la surface S d'équation $z = -\dfrac{1}{4}xy$

a. On coupe S par le plan $(x\text{O}y)$. Déterminer la section obtenue.

b. On coupe S par un plan P parallèle au plan $(x\text{O}y)$.
Quelle est la nature de la section obtenue ?

c. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse sera prise en considération dans l'évaluation.*
On coupe S par le plan d'équation $x+y=0$. Quelle est la nature de la section obtenue ?

EXERCICE 3 **3 points**
Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, on demande aux candidats d'établir, en suivant la démarche proposée, deux résultats de cours.

On rappelle que la fonction ln est définie et dérivable sur $]0~;~+\infty[$, positive sur $[1~;~+\infty[$, et vérifie :

$$\begin{cases} \ln 1 = 0 \\ \text{Pour tous réels strictement positifs } x \text{ et } y,\ \ln(xy) = \ln x + \ln y \\ \text{Pour tout réel strictement positif} x,\ [\ln(x)]' = \dfrac{1}{x} \\ \ln(2) \approx 0,69 \text{ à } 10^{-2} \text{ près} \end{cases}$$

1. On considère la fonction f définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x} - \ln x.$$

a. Étudier les variations de f et en déduire que f admet un minimum sur $]0~;~+\infty[$.

b. En déduire le signe de f puis que, pour tout $x > 1$, $0 < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{\sqrt{x}}{x}$.

c. En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

2. Soit n un entier naturel non nul.
On considère la fonction f_n définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \dfrac{\ln x}{x^{\frac{1}{n}}}.$$

En utilisant la question 1., déterminer, si elle existe, la limite en $+\infty$ de la fonction f_n.

EXERCICE 4 **7 points**
Commun à tous les candidats

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$2y' + y = 0 \quad \text{(E)},$$

dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. On considère l'équation différentielle :

$$2y' + y = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(x+1) \quad (\text{E}')$$

a. Déterminer deux réels m et p tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(mx^2 + px\right) \text{ soit solution de } (\text{E}').$$

b. Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Montrer que g est solution de l'équation (E$'$) si et seulement si $g - f$ est solution de l'équation (E).
Résoudre l'équation (E$'$).

3. Étudier les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(x^2 + 2x\right)$.
4. Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction h.
5. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$, on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de h et Γ celle de la fonction : $x \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.
   a. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}$ et Γ.
   b. Tracer ces deux courbes sur un même graphique.

Baccalauréat S Nouvelle–Calédonie mars 2009

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm. On considère les points A et B d' affixes respectives $z_A = 1$ et $z_B = 3 + 4i$.
Soit C et D les points d'affixes respectives $z_C = 2\sqrt{3} + i(-2 - \sqrt{3})$ et $z_D = -2\sqrt{3} + i(-2 + \sqrt{3})$.
L' objet de l'exercice est de proposer une construction géométrique des points D et C.

1. **a.** Montrer que l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ est le point D.

   b. En déduire que les points B et D sont sur un cercle $\mathscr{C}$ de centre A dont on déterminera le rayon.

2. Soit F, l'image du point A par l'homothétie de centre B et de rapport $\dfrac{3}{2}$.

   a. Montrer que l'affixe z_F du point F est $-2i$.

   b. Montrer que le point F est le milieu du segment [CD].

   c. Montrer que $\dfrac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = -i\sqrt{3}$. En déduire la forme exponentielle de $\dfrac{z_C - z_F}{z_A - z_F}$.
   Déduire des questions précédentes que la droite (AF) est la médiatrice du segment [CD].

3. Proposer un programme de construction pour les points D et C à partir des points A, B et F et réaliser la figure.
   Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère les points :

$$A(4\,;\,0\,;\,0),\quad B(0\,;\,2\,;\,0),\quad C(0\,;\,0\,;\,3)\quad \text{et } E\left(\frac{2}{3}\,;\,-\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{9}\right)$$

On se propose de déterminer de deux façons la distance δ_E du point E au plan (ABC).

RAPPEL : Soit $(\mathscr{P})$ un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ où a, b, c et d sont des nombre réels avec a, b et c non tous nuls et M un point de coordonnées $\left(x_M\,;\,y_M\,;\,z_M\right)$ la distance δ_M du point M au plan $(\mathscr{P})$ est égale à :

$$\frac{\left|ax_M + by_M + cz_M + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

1. **a.** Montrer que les points A, B et C déterminent bien un plan.

   b. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(3\,;\,6\,;\,4)$.
   Montrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

   c. Montrer qu'une équation du plan (ABC) est : $3x + 6y + 4z - 12 = 0$.

   d. Déduire des questions précédentes la distance δ_E.

2. a. Montrer que la droite ($\mathscr{D}$) de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x & = & 1+t \\ y & = & 2t \\ z & = & \dfrac{5}{9}+\dfrac{4}{3}t \end{array}\right. \quad \text{où } t \in \mathbb{R},$$

est perpendiculaire au plan (ABC) et passe par le point E.

b. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal G du point E sur le plan (ABC).

c. Retrouver à partir des coordonnées des points E et G la distance δ_{E}.

EXERCICE 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre plusieurs cibles.

La probabilité que la première cible soit atteinte est $\dfrac{1}{2}$.

Lorsqu'une cible est atteinte, la probabilité que la suivante le soit est $\dfrac{3}{4}$.

Lorsqu'une cible n'est pas atteinte, la probabilité que la suivante soit atteinte est $\dfrac{1}{2}$.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- A_n l'évènement : « la n-ième cible est atteinte ».
- $\overline{A_n}$ l'évènement : « la n-ième cible n'est pas atteinte.
- a_n la probabilité de l'évènement A_n
- b_n la probabilité de l'évènement $\overline{A_n}$.

1. Donner a_1 et b_1.
Calculer a_2 et b_2. On pourra utiliser un arbre pondéré.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$: $a_{n+1} = \dfrac{3}{4}a_n + \dfrac{1}{2}b_n$,
puis : $a_{n+1} = \dfrac{1}{4}a_n + \dfrac{1}{2}$

3. Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul, par $U_n = a_n - \dfrac{2}{3}$.

a. Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique.
On précisera la raison et le premier terme U_1.

b. En déduire l'expression de U_n en fonction de n, puis l'expression de a_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de la suite (a_n).

d. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $a_n \geqslant 0{,}6665$.

EXERCICE 4 — 6 points

Commun à tous les candidats

Soit f une fonction définie pour tout nombre réel x par

$$f(x) = (1+x)\mathrm{e}^{-x}.$$

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

1. a. Étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

c. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
Calculer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$.
En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

d. Tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-2 ; 5]$.

2. On note (I_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_{-1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dans cette question, on ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n.

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N} : I_n \geqslant 0$.

b. Montrer que la suite (I_n) est croissante.

3. **a.** À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tous réels a et b :

$$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = (-2-b)\mathrm{e}^{-b} + (2+a)\mathrm{e}^{-a}.$$

b. En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

c. Déterminer : $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

d. Donner une interprétation graphique de cette limite.

4. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $\displaystyle\int_{-1}^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}$.
Ce calcul intégral correspond-il à un calcul d'aire ?

∽ Baccalauréat S Pondichéry 16 avril 2009 ∾

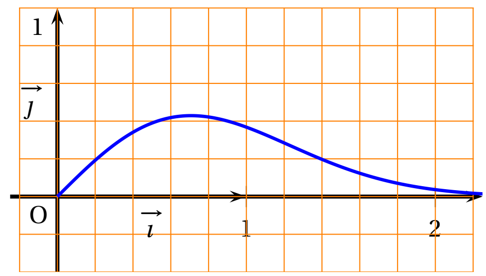
EXERCICE 1 **7 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan. Cette courbe est représentée ci-contre.



Partie A

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

   (On pourra écrire, pour x différent de 0 : $f(x) = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}$).

   b. Démontrer que f admet un maximum en $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et calculer ce maximum.

2. Soit a un nombre réel positif ou nul. Exprimer en unités d'aire et en fonction de a, l'aire $F(a)$ de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = a$.

   Quelle est la limite de $F(a)$ quand a tend vers $+\infty$?

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

On ne cherchera pas à expliciter u_n.

1. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n différent de 0 et de 1

$$f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n).$$

   b. Quel est le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$?

   c. Montrer que la suite (u_n) converge. Quelle est sa limite ?

2. **a.** Vérifier que, pour tout entier naturel strictement positif n, $F(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

   b. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   On donne ci-dessous les valeurs de $F(n)$ obtenues à l'aide d'un tableur, pour n entier compris entre 3 et 7.

n	3	4	5	6	7
$F(n)$	0,499 938 295 1	0,499 999 943 7	0,5	0,5	0,5

   Interpréter ces résultats.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 2 cm.
Soit A, B et C les points d'affixes respectives :

$$a = 3 - \text{i}, \quad b = 1 - 3\text{i} \text{ et } c = -1 - \text{i}.$$

1. **a.** Placer ces points sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure.

   b. Quelle est la nature du triangle ABC ?

   c. Démontrer que les points A et B appartiennent à un même cercle Γ de centre O, dont on calculera le rayon.

2. Soit M un point quelconque du plan d'affixe notée m et N le point d'affixe notée n, image de A dans la rotation r de centre M et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$.

   a. Donner l'écriture complexe de la rotation r.

   b. En déduire une expression de n en fonction de m.

3. On appelle Q le milieu du segment [AN] et q son affixe.
   Montrer que : $q = \dfrac{(1-\text{i})m}{2} + 2 + \text{i}$.

4. Dans cette question, M est un point du cercle Γ.

   a. Justifier l'existence d'un réel θ tel que : $m = \sqrt{10}\text{e}^{\text{i}\theta}$.

   b. Calculer $|q - 2 - \text{i}|$. Quel est le lieu Γ' de Q lorsque M décrit le cercle Γ ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 2 cm. Soit A et B les points d'affixes respectives $z_{\text{A}} = \text{i}$ et $z_{\text{B}} = 1 + 2\text{i}$.

1. Justifier qu'il existe une unique similitude directe S telle que :

$$S(\text{O}) = \text{A} \text{ et } S(\text{A}) = \text{B}.$$

2. Montrer que l'écriture complexe de S est :

$$z' = (1 - \text{i})z + \text{i}.$$

   Préciser les éléments caractéristiques de S (on notera Ω le centre de S).
   On considère la suite de points (A_n) telle que :
   - A_0 est l'origine du repère et,
   - pour tout entier naturel n, $A_{n+1} = S(A_n)$.

   On note z_n, l'affixe de A_n. (On a donc $A_0 = \text{O}$, $A_1 = \text{A}$ et $A_2 = \text{B}$).

3. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $z_n = 1 - (1 - \text{i})^n$.

   b. Déterminer, en fonction de n, les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\Omega A_n}$ et $\overrightarrow{A_n A_{n+1}}$.
   Comparer les normes de ces vecteurs et calculer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{A_n A_{n+1}}\right)$.

   c. En déduire une construction du point A_{n+1} connaissant le point A_n.
   Construire les points A_3 et A_4.

4. Quels sont les points de la suite (A_n) appartenant à la droite (ΩB) ?

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Dans un repère orthonormé de l'espace $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ on considère les points :
A de coordonnées (1 ; 1 ; 0), B de coordonnées (2 ; 0 ; 3), C de coordonnées (0 ; −2 ; 5) et D de coordonnées (1 ; −5 ; 5).

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est VRAIE ou par FAUSSE en justifiant chaque fois la réponse :
Proposition 1 : L'ensemble des points M de coordonnées $(x,\ y,\ z)$ tels que $y = 2x+4$ est une droite.

Proposition 2 : La transformation qui, à tout point M de l'espace associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ est l'homothétie de centre G, où G désigne le barycentre du système $\{(A,\ 1),\ \ (B,\ 1),\ (C,\ 2)\}$, et de rapport 3.

Proposition 3 : A, B, C et D sont quatre points coplanaires.

Proposition 4 : La sphère de centre Ω de coordonnées (3, 3, 0) et de rayon 5 est tangente au plan d'équation : $2x+2y+z+3=0$.

EXERCICE 4 **4 points**

Commun à tous les candidats

On dispose de deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Ces dés sont en apparence identiques mais l'un est bien équilibré et l'autre truqué. Avec le dé truqué la probabilité d'obtenir 6 lors d'un lancer est égale à $\dfrac{1}{3}$.

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. On lance le dé bien équilibré trois fois de suite et on désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus.
   a. Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire X ?
   b. Quelle est son espérance ?
   c. Calculer $P(X=2)$.
2. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables. Et on lance le dé choisi trois fois de suite.
   On considère les évènements D et A suivants :
   - D « le dé choisi est le dé bien équilibré » ;
   - A : « obtenir exactement deux 6 ».

   a. Calculer la probabilité des évènements suivants :
      - « choisir le dé bien équilibré et obtenir exactement deux 6 » ;
      - « choisir le dé truqué et obtenir exactement deux 6 ».

      (On pourra construire un arbre de probabilité).
   b. En déduire que : $p(A) = \dfrac{7}{48}$.
   c. Ayant choisi au hasard l'un des deux dés et l'ayant lancé trois fois de suite, on a obtenu exactement deux 6. Quelle est la probabilité d'avoir choisi le dé truqué ?
3. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables, et on lance le dé n fois de suite (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2).
   On note B_n l'évènement « obtenir au moins un 6 parmi ces n lancers successifs ».
   a. Déterminer, en fonction de n, la probabilité p_n de l'évènement B_n.
   b. Calculer la limite de la suite (p_n). Commenter ce résultat.

Baccalauréat S Amérique du Nord 4 juin 2009

EXERCICE 1 **5 points**

Dans cet exercice on étudie une épidémie dans une population.

Partie A : Étude de la progression de l'épidémie pendant 30 jours

Au début de l'épidémie on constate que 0,01 % de la population est contaminé.
Pour t appartenant à $[0\,;30]$, on note $y(t)$ le pourcentage de personnes touchées par la maladie après t jours.
On a donc $y(0) = 0,01$.
On admet que la fonction y ainsi définie sur $[0\,;30]$ est dérivable, strictement positive et vérifie :

$$y' = 0,05y(10 - y).$$

1. On considère la fonction z définie sur l'intervalle $[0\,;30]$ par $z = \dfrac{1}{y}$.

   Démontrer que la fonction y satisfait aux conditions $\left\{\begin{array}{lcl} y(0) & = & 0,01 \\ y' & = & 0,05y(10-y) \end{array}\right.$ si et seulement si la fonction z satisfait aux conditions $\left\{\begin{array}{lcl} z(0) & = & 100 \\ z' & = & -0,5z + 0,05 \end{array}\right.$

2. **a.** En déduire une expression de la fonction z puis celle de la fonction y.

   b. Calculer le pourcentage de la population infectée après 30 jours. On donnera la valeur arrondie à l'entier le plus proche.

Partie B : Étude sur l'efficacité d'un vaccin

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Le quart de la population est vacciné contre cette maladie contagieuse. De plus, on estime que sur la population vaccinée, 92 % des individus ne tombent pas malades.
Sur la population totale, on estime aussi que 10 % des individus sont malades.
On choisit au hasard un individu dans cette population.

1. Montrer que la probabilité de l'évènement « l'individu n'est pas vacciné et tombe malade » est égale à 0, 08.
2. Quelle est la probabilité de tomber malade pour un individu qui n'est pas vacciné ?

EXERCICE 2 **5 points**

Partie A : Restitution organisée de connaissances

On supposera connus les résultats suivants :
Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$ avec $a < b$.

- Si $u \geqslant 0$ sur $[a\,;\,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
- Pour tous réels α et β, $\displaystyle\int_a^b [\alpha u(x) + \beta v(x)]\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$.

Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$ avec $a < b$ et si, pour tout x de $[a\,;\,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ et on définit la suite (u_n) par :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\ \text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_n = \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \end{array}\right.$$

1. **a.** Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$, $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \leqslant f(x) \leqslant 1$.

b. En déduire que $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \leqslant u_0 \leqslant 1$.

2. Calculer u_1.

3. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n$.

b. Étudier les variations de la suite (u_n).

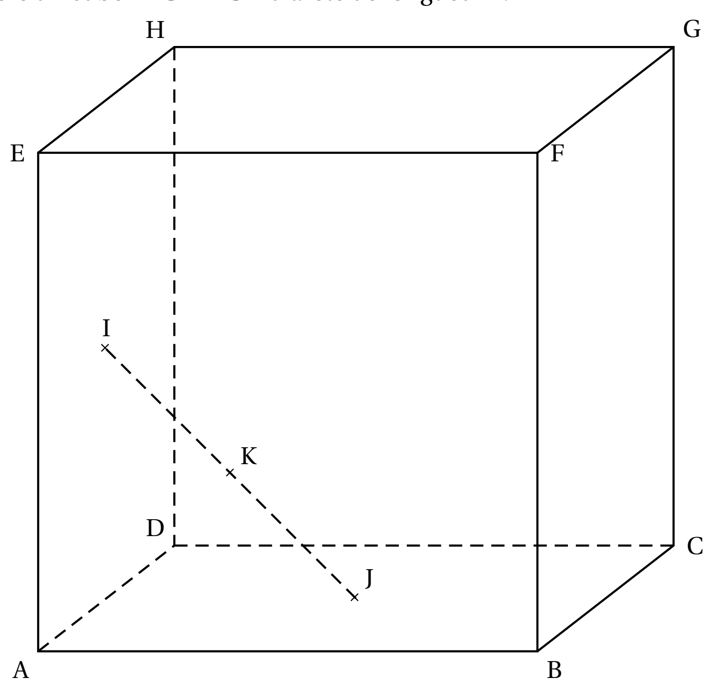
c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

b. En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 3 — 5 points

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.



On note I le centre de la face ADHE, J celui de la face ABCD et K le milieu du segment [IJ].

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{A}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées des points l, J et K dans ce repère.
2. Démontrer que les points A, K et G ne sont pas alignés.
3. **a.** Démontrer que le plan médiateur du segment [IJ] est le plan (AKG).
   b. Déterminer une équation cartésienne du plan (AKG).
   c. Vérifier que le point D appartient au plan (AKG).
4. Dans cette question, on veut exprimer K comme barycentre des points A, D et G.
   Soit L le centre du carré DCGH.
   a. Démontrer que le point K est le milieu du segment [AL].
   b. *Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Démontrer que K est le barycentre des points A. D et G affectés de coefficients que l'on précisera.

EXERCICE 4 **5 points**
Enseignement obligatoire

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Soit A le point d'affixe $a = 1 + i\sqrt{3}$ et B le point d'affixe $b = 1 - \sqrt{3} + \left(1 + \sqrt{3}\right)i$.

Partie A : étude d'un cas particulier

On considère la rotation r de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.
On note C le point d'affixe c image du point A par la rotation r et D le point d'affixe d image du point B par la rotation r.
La figure est donnée en annexe (figure 1).

1. **a.** Exprimer $\dfrac{-a}{b-a}$ sous forme algébrique.
   b. En déduire que OAB est un triangle rectangle isocèle en A.
2. Démontrer que $c = -2$. On admet que $d = -2 - 2i$.
   a. Montrer que la droite (AC) a pour équation $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+2)$.
   b. Démontrer que le milieu du segment [BD] appartient à la droite (AC).

Partie B : étude du cas général

Soit θ un réel appartenant à l'intervalle $]0\,;\,2\pi[$. On considère la rotation de centre O et d'angle θ.
On note A$'$ le point d'affixe a', image du point A par la rotation r, et B$'$ le point d'affixe b', image du point B par la rotation r.
La figure est donnée en annexe (figure 2).
L'objectif est de démontrer que la droite (AA$'$) coupe le segment [BB$'$] en son milieu.

1. Exprimer a' en fonction de a et θ et b' en fonction de b et θ.
2. Soit P le point d'affixe p milieu de [AA$'$] et Q le point d'affixe q milieu de [BB$'$].
   a. Exprimer p en fonction de a et θ puis q en fonction de b et θ.
   b. Démontrer que $\dfrac{-p}{q-p} = \dfrac{-a}{b-a}$.
   c. En déduire que la droite (OP) est perpendiculaire à la droite (PQ).
   d. Démontrer que le point Q appartient à la droite (AA$'$).

EXERCICE 4 **5 points**

Enseignement de spécialité

Soit A l'ensemble des entiers naturels de l'intervalle $[1~;~46]$.

1. On considère l'équation

$$(E): \quad 23x + 47y = 1$$

où x et y sont des entiers relatifs.

a. Donner une solution particulière $\left(x_0,~y_0\right)$ de (E).

b. Déterminer l'ensemble des couples $(x,~y)$ solutions de (E).

c. En déduire qu'il existe un unique entier x appartenant à A tel que r$23x \equiv 1 \quad (47)$.

2. Soient a et b deux entiers relatifs.

a. Montrer que si $ab \equiv 0 \quad (47)$ alors $a \equiv 0 \quad (47))$ ou $b \equiv 0 \quad (47)$.

b. En déduire que si $a^2 \equiv 1 \quad (47)$ alors $a \equiv 1 \quad (47)$ ou a $a \equiv -1 \quad (47)$.

3. **a.** Montrer que pour tout entier p de A, il existe un entier relatif q tel que $p \times q \equiv 1 \quad (47)$.

Pour la suite, on admet que pour tout entier p de A, il existe un unique entier, noté $inv(p)$, appartenant à A tel que

$p \times inv(p) \equiv 1 \quad (47)$.

Par exemple :

$inv(1) = 1$ car $1 \times 1 \equiv 1 \quad (47)$, $inv(2) = 24$ car $2 \times 24 \equiv 1 \quad (47)$,

$inv(3) = 16$ car $3 \times 16 \equiv 1 \quad (47)$.

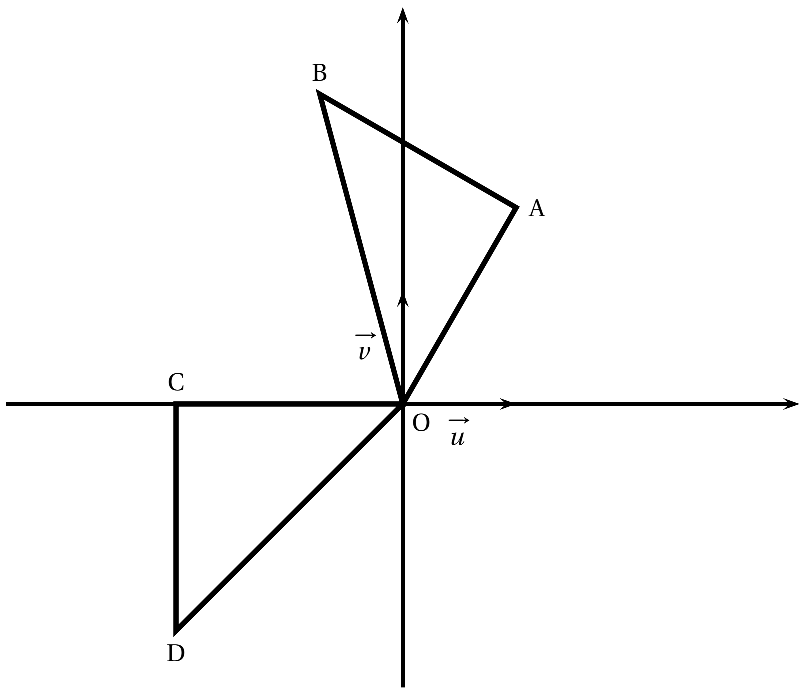
b. Quels sont les entiers p de A qui vérifient $p = inv(p)$?

c. Montrer que $46! \equiv -1 \quad (47)$.

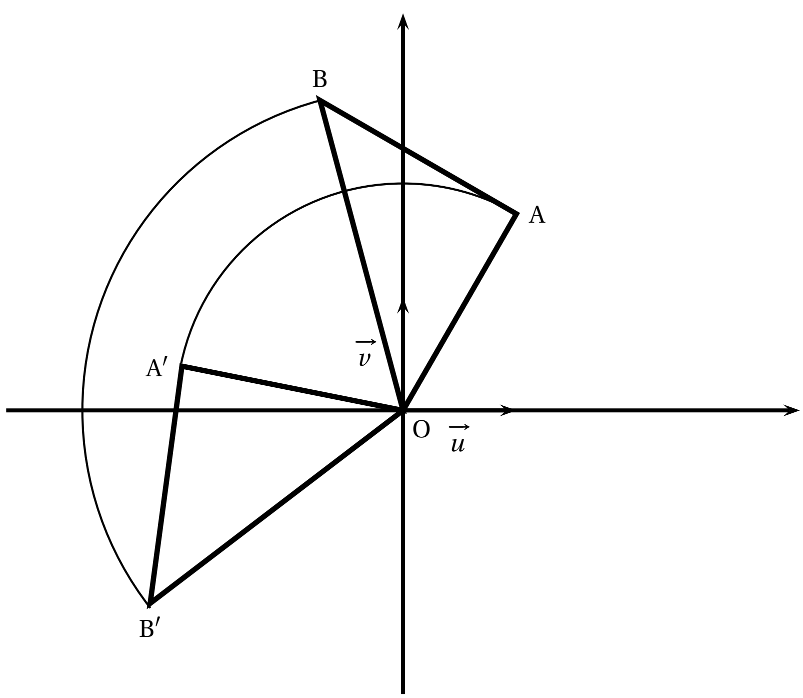
ANNEXE

Cette page ne sera pas à rendre avec la copie

Exercice 4



Partie A : figure 1



Partie B : figure 2

∽ Baccalauréat S Liban 11 juin 2009 ∾

EXERCICE 1 **3 points**

Pour chacune des trois questions, une seule des quatre propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie, sans justification.
Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

1. On désigne par A et B deux évènements indépendants d'un univers muni d'une loi de probabilité p.
   On sait que $p(A \cup B) = \frac{4}{5}$ et $p\left(\overline{A}\right) = \frac{3}{5}$.
   La probabilité de l'évènement B est égale à :

   a. $\frac{2}{5}$ **b.** $\frac{2}{3}$ **c.** $\frac{3}{5}$ **d.** $\frac{1}{2}$

2. On note X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,04$.
   On rappelle que pour tout réel t positif, la probabilité de l'évènement $(X \leqslant t)$, notée $p(X \leqslant t)$, est donnée par $p(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$.
   La valeur approchée de $p(X > 5)$ à 10^{-2} près par excès est égale à :

   a. $0,91$ **b.** $0,18$ **c.** $0,19$ **d.** $0,82$

3. Dans ma rue, il pleut un soir sur quatre.
   S'il pleut, je sors mon chien avec une probabilité égale à $\frac{1}{10}$; s'il ne pleut pas, je sors mon chien avec une probabilité égale à $\frac{9}{10}$.
   Je sors mon chien ; la probabilité qu'il ne pleuve pas est égale à :

   a. $\frac{9}{10}$ **b.** $\frac{27}{40}$ **c.** $\frac{3}{4}$ **d.** $\frac{27}{28}$

EXERCICE 2 **8 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(1 + e^{-x}\right) + \frac{1}{3}x.$$

La courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal est donnée en annexe.
Cette annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

Partie A

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   b. Montrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{3}x$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$. Tracer (D).
   c. Étudier la position relative de (D) et de $(\mathscr{C})$.

d. Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^x + 1\right) - \dfrac{2}{3}x$.

e. En déduire la limite de f en $-\infty$.

2. **a.** On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

Montrer que pour tout x réel, $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 2}{3\left(\mathrm{e}^x + 1\right)}$.

b. En déduire les variations de la fonction f.

Partie B

Soit n un entier naturel non nul. On appelle d_n, l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe ($\mathscr{C}$), la droite (D) d'équation $y = \dfrac{1}{3}x$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $d_n = \displaystyle\int_0^n \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x$.

2. On admet que pour tout réel x, $\ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$.

Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $d_n \leqslant 1$. La suite $(d_n)_{n \geqslant 1}$ est-elle convergente ?

Partie C

Dans cette partie, on cherche à mettre en évidence une propriété de la courbe ($\mathscr{C}$). On note (T) la tangente à la courbe ($\mathscr{C}$) au point d'abscisse 0.

1. Calculer le coefficient directeur de (T) puis construire (T) sur le graphique.

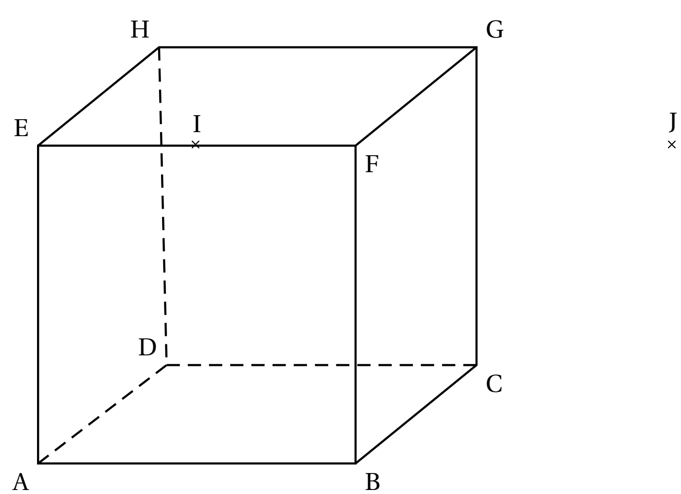
2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Soient M et N deux points de la courbe ($\mathscr{C}$) d'abscisses non nulles et opposées. Montrer que la droite (MN) est parallèle à la droite (T).

EXERCICE 3 **4 points**

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1. On désigne par I le milieu de [EF] et par J le symétrique de E par rapport à F.

Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{A}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AB}},\,\overrightarrow{\mathrm{AD}},\,\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.



1. a. Déterminer les coordonnées des points I et J.
   b. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{\text{DJ}}$ est un vecteur normal au plan (BGI).
   c. En déduire une équation cartésienne du plan (BGI).
   d. Calculer la distance du point F au plan (BGI).
2. On note (Δ) la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).
   a. Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ).
   b. Montrer que la droite (Δ) passe par le centre K de la face ADHE.
   c. Montrer que la droite (Δ) et le plan (BGI) sont sécants en un point, noté L, de coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{6}\,;\,\frac{5}{6}\right)$.
   d. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Le point L est-il l'orthocentre du triangle BGI ?

EXERCICE 4 **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).
On considère les points A, B et C d' affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = -\frac{3}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_{\text{B}} = \overline{z_{\text{A}}} \text{ et } z_{\text{C}} = -3.$$

Partie A

1. Écrire les nombres complexes z_{A} et z_{B} sous forme exponentielle.
2. Placer les points A, B et C.
3. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

Partie B

Soit f l'application qui, à tout point M du plan d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{3}\text{i}z^2$.
On note O$'$, A$'$, B$'$ et C$'$ les points respectivement associés par f aux points O, A, B et C.

1. a. Déterminer la forme exponentielle des affixes des points A$'$, B$'$ et C$'$.
   b. Placer les points A$'$, B$'$ et C$'$.
   c. Démontrer l'alignement des points O, A et B$'$ ainsi que celui des points O, B et A$'$.
2. Soit G l'isobarycentre des points O, A, B et C. On note G$'$ le point associé à G par f.
   a. Déterminer les affixes des points G et G$'$.
   b. Le point G$'$ est-il l'isobarycentre des points O$'$ A$'$, B$'$ et C$'$?
3. Démontrer que si M appartient à la droite (AB) alors M' appartient à la parabole d'équation $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}$. (On ne demande pas de tracer cette parabole)

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un entier naturel n dont l'écriture décimale du cube se termine par 2 009, c'est-à-dire tel que $n^3 \equiv 2009 \mod 10000$.

Partie A

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de $2\,009^2$ par 16.
2. En déduire que $2\,009^{8\,001} \equiv 2\,009 \mod 16$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$u_0 = 2\,009^2 - 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1$.

1. **a.** Démontrer que u_0 est divisible par 5.

   b. Démontrer, en utilisant la formule du binôme de Newton, que pour tout entier naturel n,

   $$u_{n+1} = u_n \left[{u_n}^4 + 5\left({u_n}^3 + 2{u_n}^2 + 2u_n + 1 \right) \right].$$

   c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n est divisible par 5^{n+1}.
2. **a.** Vérifier que $u_3 = 2\,009^{250} - 1$ puis en déduire que $2\,009^{250} \equiv 1 \mod 625$.

   b. Démontrer alors que $2\,009^{8\,001} \equiv 2\,009 \mod 625$.

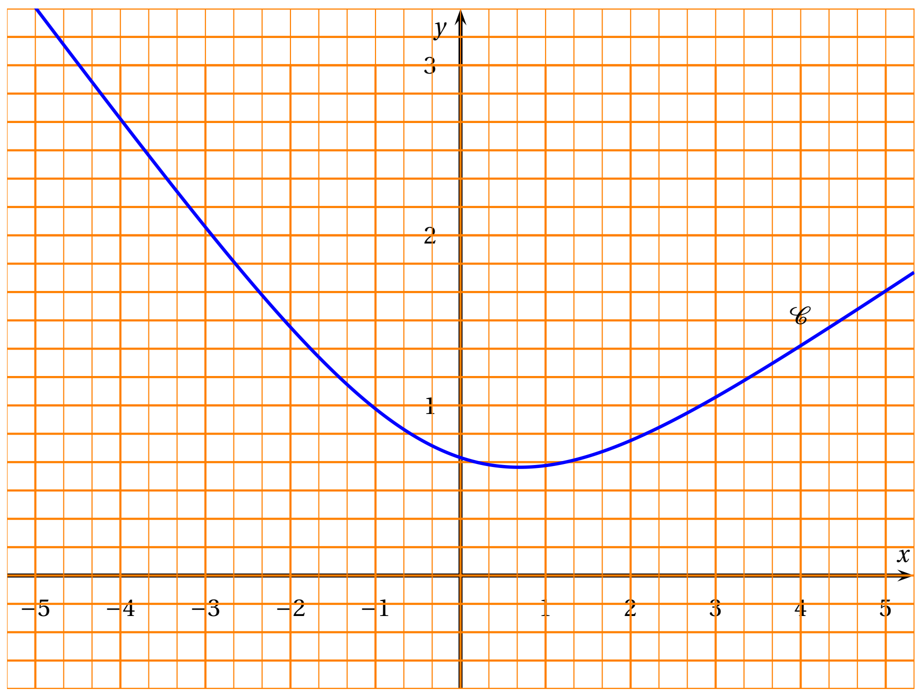
Partie C

1. En utilisant le théorème de Gauss et les résultats établis dans les questions précédentes, montrer que $2\,009^{8\,001} - 2\,009$ est divisible par 10 000.
2. Conclure, c'est-à-dire déterminer un entier naturel dont l'écriture décimale du cube se termine par 2 009.

ANNEXE

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve

Exercice 2



Durée : 4 heures

Baccalauréat S Centres étrangers 15 juin 2009

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. **Restitution organisée de connaissances :**

   Prérequis : On rappelle que deux évènements A et B sont indépendants pour la probabilité p si et seulement si : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

   Soient A et B deux évènements associés à une expérience aléatoire

   a. Démontrer que $p(B) = p(B \cap A) + p\left(B \cap \overline{A}\right)$.

   b. Démontrer que, si les évènements A et B sont indépendants pour la probabilité p, alors les évènements $\overline{A}$ et B le sont également.

2. **Application :** Chaque matin de classe, Stéphane peut être victime de deux évènements indépendants :
   - R : « il n'entend pas son réveil sonner » ;
   - S : « Son scooter, mal entretenu, tombe en panne ».

   Il a observé que chaque jour de classe, la probabilité de R est égale $0,1$ et que celle de S est égale à $0,05$. Lorsque qu'au moins l'un des deux évènements se produit, Stéphane est en retard au lycée sinon il est à l'heure.

   a. Calculer la probabilité qu'un jour de classe donné, Stéphane entende son réveil sonner et que son scooter tombe en panne.

   b. Calculer la probabilité que Stéphane soit à l'heure au lycée un jour de classe donné.

   c. Au cours d'une semaine, Stéphane se rend cinq fois au lycée. On admet que le fait qu'il entende son réveil sonner un jour de classe donné n'influe pas sur le fait qu'il l'entende ou non les jours suivants.
   Quelle est la probabilité que Stéphane entende le réveil au moins quatre fois au cours d'une semaine ? Arrondir le résultat à la quatrième décimale.

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On se propose dans cet exercice, d'étudier des propriétés d'un solide de l'espace.
L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points A(3 ; 4 ; 0) ; B(0 ; 5 ; 0) et C(0 ; 0 ; 5). On note I le milieu du segment [AB].

1. Faire une figure où l'on placera les points A, B, C, I dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
2. Démontrer que les triangles OAC et OBC sont rectangles et isocèles.
   Quelle est la nature du triangle ABC ?
3. Soit H le point de coordonnées $\left(\dfrac{15}{19} ; \dfrac{45}{19} ; \dfrac{45}{19}\right)$.

a. Démontrer que les points H, C, I sont alignés.

b. Démontrer que H est le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).

c. En déduire une équation cartésienne du plan ABC.

4. Calculs d'aire et de volume.

a. Calculer l'aire du triangle OAB. En déduire le volume du tétraèdre OABC.

b. Déterminer la distance du point O au plan (ABC).

c. Calculer l'aire du triangle ABC.

EXERCICE 2 — 5 points

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On note (E) l'équation $3x+2y = 29$ où x et y sont deux nombres entiers relatifs.

a. Déterminer un couple d'entiers solution de l'équation (E).

b. Déterminer tous les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

c. Préciser les solutions de l'équation (E) pour lesquelles on a à la fois $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$;

2. Intersections d'un plan avec les plans de coordonnées

L'espace est muni du repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$ et on désigne par $\mathscr{P}$ le plan d'équation $3x+2y = 29$.

a. Démontrer que $\mathscr{P}$ est parallèle à l'axe (Oz) de vecteur directeur $\vec{k}$.

b. Déterminer les coordonnées des points d'intersection du plan $\mathscr{P}$ avec les axes (Ox) et (Oy) de vecteurs directeurs respectifs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

c. Faire une figure et tracer les droites d'intersection du plan $\mathscr{P}$ avec les trois plans de coordonnées.

d. Sur la figure précédente, placer sur la droite d'intersection des plans $\mathscr{P}$ et (xOy), les points dont les coordonnées sont à la fois entières et positives.

3. Étude d'une surface

$\mathscr{S}$ est la surface d'équation $4z = xy$ dans le repère $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$.

Les figures suivantes représentent les intersections de $\mathscr{S}$ avec certains plans de l'espace.

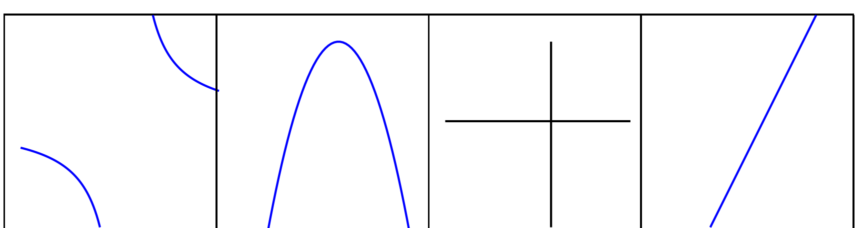


figure n$^{\text{o}}$ 1	figure n$^{\text{o}}$ 2	figure n$^{\text{o}}$ 3	figure n$^{\text{o}}$ 4

a. S_1 désigne la section de la surface $\mathscr{S}$ par le plan (xOy).
Une des figures données représente S_1 laquelle ?

b. S_2 désigne la section de $\mathscr{S}$ par le plan $\mathscr{R}$ d'équation $z = 1$.
Une des figures données représente S_2, laquelle ?

c. S_3 désigne la section de $\mathscr{S}$ par le plan d'équation $y = 8$.
Une des figures données représente S_3, laquelle ?

d. S_4 désigne la section de $\mathcal{S}$ par le plan $\mathcal{P}$ d'équation $3x+2y=29$ de la question 2.

Déterminer les coordonnées des points communs à S_4 et $\mathcal{P}$ dont l'abscisse x et l'ordonnée y sont des entiers naturels vérifiant l'équation

$3x+2y=29$.

EXERCICE 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse, on pourra donner un contre-exemple.

1. Pour tout complexe z, $\text{Re}\left(z^2\right)=(\text{Re}(z))^2$.

2. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Pour tout nombre complexe z non nul, les points M d'affixe z, N d'affixe $\overline{z}$ et P d'affixe $\dfrac{z^2}{\overline{z}}$ appartiennent à un même cercle de centre O.

3. Pour tout nombre complexe z, si $|1+\text{i}z|=|1-\text{i}z|$, alors la partie imaginaire de z est nulle.

4. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

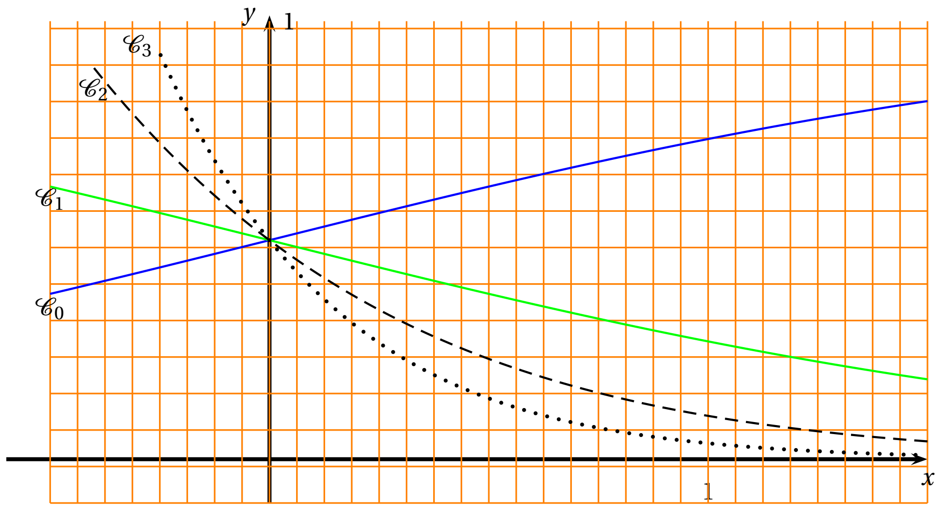
Quels que soient les nombres complexes z et z' non nuls, d'images respectives M et M' dans le plan eomplexe, si z et z' vérifient l'égalité $|z+z'|=|z-z'|$, alors les droites $(\text{O}M)$ et $(\text{O}M')$ sont perpendiculaires.

EXERCICE 4 **6 points**
Commun à tous les candidats

Soit n un entier naturel.
On note f_n, la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f_n(x)=\frac{\text{e}^{-nx}}{1+\text{e}^{-x}}.$$

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Les courbes $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ sont représentées ci-dessous :



Partie A : *Quelques propriétés des fonctions f_n et des courbes $\mathscr{C}_n$*

1. Démontrer que pour tout entier naturel n les courbes $\mathscr{C}_n$ ont un point A en commun. On préciser ses coordonnées.
2. Étude de la fonction f_0
   a. Étudier le sens de variation de f_0.
   b. Préciser les limites de la fonction f_0 en $-\infty$ et $+\infty$. Interpréter graphiquement ces limites.
   c. Dresser le tableau de variation de fonction f_0 sur $\mathbb{R}$.
3. Étude de la fonction f_1
   a. Démontrer que $f_0(x) = f_1(-x)$ pour tout nombre réel x.
   b. En déduire les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et $+\infty$, ainsi que son sens de variation.
   c. Donner une interprétation géométrique de 3. a. pour les courbes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$.
4. Étude de la fonction f_n pour $n \geqslant 2$
   a. Vérifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ et pour tout nombre réel x, on a :
   $$f_n(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^{nx} + \mathrm{e}^{(n-1)x}}.$$
   b. Étudier les limites de la fonction f_n en $-\infty$ et en $+\infty$.
   c. Calculer la dérivée $f_n'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$.

Partie B : *Étude d'une suite liée aux fonctions f_n*

On pose, pour tout entier naturel n : $\quad u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer u_1 puis montrer que $u_0 + u_1 = 1$. En déduire u_0.
2. Démontrer que, pour tout entier n : $0 \leqslant u_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$.
3. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$. En déduire que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

∽ Baccalauréat S Asie 16 juin 2009 ∾

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Une entreprise fait fabriquer des paires de chaussette auprès de trois fournisseurs $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$, $\mathscr{F}_3$.
Dans l'entreprise, toutes ces paires de chaussettes sont regroupées dans un stock unique.
La moitié des paires de chaussettes est fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_1$, le tiers par le fournisseur $\mathscr{F}_2$ et le reste par le fournisseur $\mathscr{F}_3$.

Une étude statistique a montré que

- 5 % des paires de chaussette fabriquées par le fournisseur $\mathscr{F}_1$ ont un défaut ;
- 1,5 % des paires de chaussette fabriquées par le fournisseur $\mathscr{F}_2$ ont un défaut ;
- sur l'ensemble du stock, 3,5 % des paires de chaussette ont un défaut.

1. On prélève au hasard une paire de chaussettes dans le stock de l'entreprise.

On considère les évènements F_1, F_2, F_3 et D suivants :

- F_1 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_1$ » ;
- F_2 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_2$ » ;
- F_3 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_3$ » ;
- D : « La paire de chaussettes prélevée présente un défaut ».

a. Traduire en termes de probabilités les données de l'énoncé en utilisant les évènements précédents.
Dans la suite, on pourra utiliser un arbre pondéré associé à cet expérience.

b. Calculer la probabilité qu'une paire de chaussettes prélevée soit fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_1$ et présente un défaut.

c. Calculer la probabilité de l'évènement $F_2 \cap D$.

d. En déduire la probabilité de l'évènement $F_3 \cap D$.

e. Sachant que la paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_3$, quelle est la probabilité qu'elle présente un défaut ?

2. L'entreprise conditionne les paires de chaussettes par lots de six paires.
On considère que le stock est suffisamment grand pour assimiler le choix des six paires de chaussettes à des tirages indépendants, succesifs avec remise.

a. Calculer la probabilité que deux paires de chaussettes exactement d'un lot présentent un défaut ; on donnera un résultat arrondi au millième.

b. Démontrer que la probabilité, arrondie au millième, qu'au plus une paire de chaussettes d'un lot présente un défaut est égale à $0,983$.

EXERCICE 2 **5 points**
Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On place dans ce repère, les points A d'affixe 1, B d'affixe b où b est un nombre complexe dont la partie imaginaire est strictement positive.
On construit à l'extérieur du triangle O AB, les carrés directs ODCA et OBEF comme indiqué sur la figure ci-dessous.

1. Déterminer les affixes c et d des points C et D.

2. On note r la rotation de centre O et d'angle $+\frac{\pi}{2}$.

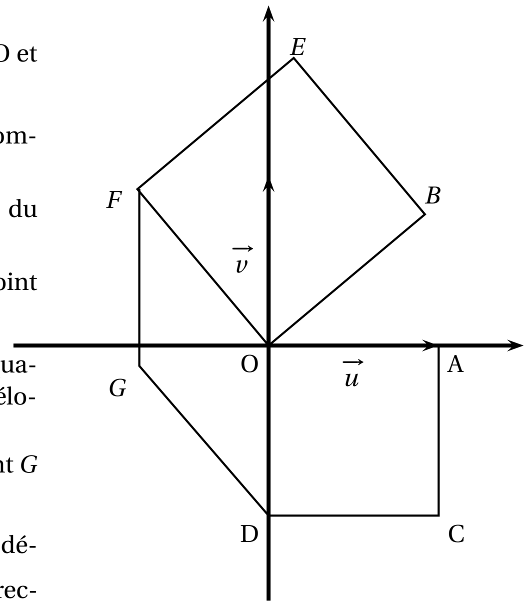
  a. Déterminer l'écriture complexe de r.

  b. En déduire que l'affixe f du point F est ib.

  c. Déterminer l'affixe e du point E.

3. On appelle G le point tel que le quadrilatère OFGD soit un parallélogramme.
Démontrer que l'affixe g du point G est égal à $\mathrm{i}(b-1)$.

4. Démontrer que $\dfrac{e-g}{c-g} = \mathrm{i}$ et en déduire que le triangle EGC est rectangle et isocèle.



Exercice 2 **5 points**

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On se propose, dans cette question, de déterminer tous les entiers relatifs N tels que

$$\left\{\begin{array}{lll} N & \equiv & 5 \quad (13) \\ N & \equiv & 1 \quad (17) \end{array}\right.$$

  a. Vérifier que 239 est solution de ce système.

  b. Soit N un entier relatif solution de ce système.
  Démontrer que N peut s'écrire sous la forme $N = 1 + 17x = 5 + 13y$ où x et y sont deux entiers relatifs vérifiant la relation $17x - 13y = 4$.

  c. Résoudre l'équation $17x - 13y = 4$ où x et y sont des entiers relatifs.

  d. En déduire qu'il existe un entier relatif k tel que $N = 18 + 221k$.

  e. Démontrer l'équivalence entre $N \equiv 18 \quad (221)$ et $\left\{\begin{array}{lll} N & \equiv & 5 \quad (13) \\ N & \equiv & 1 \quad (17) \end{array}\right.$.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infruxtueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

  a. Existe-t-il un entier naturel k tel que $10^k \equiv 1 \quad (17)$?

  b. Existe-t-il un entier naturel l tel que $10^l \equiv 18 \quad (221)$?

Exercice 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

On considère l'équation notée (E) : $\ln x = -x$.

Le but de l'exercice est de prouver que l'équation (E), admet une solution unique notée α appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$ et d'utiliser une suite convergente pour en obtenir un encadrement.

Partie A : existence et unicité de la solution

On considère la fonction f défmie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par $f(x) = x + \ln x$.

1. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
3. Vérifier que : $\dfrac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Partie B : encadrement de la solution α

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{4x - \ln x}{5}$.

1. Étude de quelques propriétés de la fonction g.
   a. Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
   b. En déduire que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}~;~1\right]$, $g(x)$ appartient à cet intervalle.
   c. Démontrer qu'un nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$ est solution de l'équation (E) si et seulement si $g(x) = x$.
2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = g(u_n)$.
   a. En utilisant le sens de variation de la fonction g, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
   b. En déduire que la suite (u_n) converge vers α.
3. Recherche d'une valeur approchée de α
   a. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de u_{10}, arrondie à la sixième décimale.
   b. On admet que u_{10} est une valeur approchée par défaut à 5×10^{-4} près de α.
   En déduire un encadrement de α sous la forme $u \leqslant \alpha \leqslant v$ où u et v sont deux décimaux écrits avec trois décimales.

EXERCICE 4 **4 points**
Commun à tous les candidats

L'exercice comporte quatre questions indépendantes. Pour chacune d'entre elles, trois réponses sont proposées dont une seule est exacte. Il s'agit de déterminer la bonne réponse et de justifier le choix ainsi effectué.
Un choix non justifié ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. Question 1

La solution f de l'équation différentielle $y' + 2y = 6$ qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1$ est définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

Réponse (1) :	Réponse (2) :	Réponse (3) :
$f(x) = -2\mathrm{e}^{-2x} + 3$	$f(x) = -2\mathrm{e}^{2x} + 3$	$f(x) = -2\mathrm{e}^{-2x} - 3$

2. Question 2

On considère un triangle ABC et on note I le point tel que $2\overrightarrow{\mathrm{IB}} + \overrightarrow{\mathrm{IC}} = \overrightarrow{0}$.

Les points G, I et A sont alignés lorsque G est le barycentre du système :

Réponse (1) :	Réponse (2) :	Réponse (3) :
{(A, 1), (C, 2)}	{(A, 1), (B, 2), (C, 2)}	{(A, 1), (B, 2), (C, 1)}

3. Question 3

Dans l'espace muni d'un repère orthononnal $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$, on considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne : $x - 3y + 2z = 5$ et le point A(2 ; 3 ; −1).

Le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$ est le point :

Réponse (1) :	Réponse (2) :	Réponse (3) :
$\mathrm{H}_1(3\,;\,-1\,;\,4)$	$\mathrm{H}_2(4\,;\,-3\,;\,-4)$	$\mathrm{H}_3(3\,;\,0\,;\,1)$

4. Question 4

La valeur moyenne de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ est égale à :

Réponse (1) :	Réponse (2) :	Réponse (3) :
$-\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{2}$

Baccalauréat S Polynésie juin 2009

Exercice 1 — 4 points

Commun à tous les candidats.

Une entreprise fabrique des lecteurs MP3, dont 6 % sont défectueux.
Chaque lecteur MP3 est soumis à une unité de contrôle dont la fiabilité n'est pas parfaite.
Cette unité de contrôle rejette 98 % des lecteurs MP3 défectueux et 5 % des lecteurs MP3 fonctionnant correctement.
On note :

- D l'évènement : « le lecteur MP3 est défectueux » ;
- R l'évènement : « l'unité de contrôle rejette le lecteur MP3 ».

1. Faire un arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.
2. **a.** Calculer la probabilité que le lecteur soit défectueux et ne soit pas rejeté.

   b. On dit qu'il y a une erreur de contrôle lorsque le lecteur MP3 est rejeté alors qu'il n'est pas défectueux, ou qu'il n'est pas rejeté alors qu'il est défectueux.

   Calculer la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle.
3. Montrer que la probabilité qu'un lecteur MP3 ne soit pas rejeté est égale à 0,894 2.
4. Quatre contrôles successifs indépendants sont maintenant réalisés pour savoir si un lecteur MP3 peut être commercialisé.

   Un lecteur MP3 est :

   - commercialisé avec le logo de l'entreprise s'il subit avec succès les quatre contrôles successifs,
   - détruit s'il est rejeté au moins deux fois,
   - commercialisé sans le logo sinon.

   Le coût de fabrication d'un lecteur MP3 s'élève à 50 €.

   Son prix de vente est de 120 € pour un lecteur avec logo et 60 € pour un lecteur sans logo.

   On désigne par G la variable aléatoire qui, à chaque lecteur MP3 fabriqué, associe le gain algébrique en euros (éventuellement négatif) réalisé par l'entreprise.

   a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire G.

   b. Calculer à 10^{-2} près l'espérance mathématique de G. Donner une interprétation de ce résultat.

Exercice 2 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct.
On supposera connus les résultats suivants :

• Pour tous points A, B et C du plan d'affixes respectives a, b et c, avec $\text{A} \neq \text{C}$ et $\text{A} \neq \text{B}$:
$\left|\dfrac{b-a}{c-a}\right| = \dfrac{\text{AB}}{\text{AC}}$ et $\arg\left(\dfrac{b-a}{c-a}\right) = \left(\overrightarrow{\text{AC}}\,,\,\overrightarrow{\text{AB}}\right) + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif ;
• Soit z un nombre complexe et soit θ un nombre réel :
$z = \text{e}^{\text{i}\theta}$ si et seulement si $|z| = 1$ et $\arg(z) = \theta + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif.

Démontrer que la rotation r d'angle α et de centre Ω d' affixe ω est la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' - \omega = \text{e}^{\text{i}\theta}(z - \omega)$.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u}\,,\ \vec{v}\right)$, unité graphique 1 cm.
Soit f l'application qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \text{i}z + 4 + 4\text{i}.$$

1. **a.** Déterminer l'affixe ω du point Ω tel que $f(\Omega) = \Omega$

   b. Montrer que, pour tout nombre complexe z on a : $z' - 4\text{i} = \text{i}(z - 4\text{i})$.

   c. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

2. On note A et B les points d'affixes respectives $a = 4 - 2\text{i}$ et $b = -4 + 6\text{i}$.

   a. Placer les points A, B et Ω sur une figure que l'on completera au fur et à mesure des questions.

   b. Déterminer les affixes des points A$'$ et B$'$ images respectives des points A et B par f.

3. On appelle m, n, p et q les affixes des points M N, P et Q, milieux respectifs des segments [AA$'$], [A$'$B], [BB$'$] et [B$'$A].

   a. Déterminer m. On admettra que $n = 1 + 7\text{i}$, $p = -3 + 3\text{i}$ et $q = 1 - \text{i}$.

   b. Démontrer que MNPQ est un parallélogramme.

   c. Déterminer la forme algëbrique du nombre complexe $\dfrac{q-m}{n-m}$.
   En déduire la nature du quadrilatère MNPQ.

4. Démontrer que les droites (B$'$A) et (ΩN) sont perpendiculaires.

Exercice 2 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct.
On supposera connu le résultat suivant :
Une application f du plan dans lui-même est une similitude directe si et seulement si f admet une écriture complexe de la forme $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C} - \{0\}$ et $b \in \mathbb{C}$.
Démontrer que si A, B, A$'$ et B$'$ sont quatre points tels que A est distinct de B et A$'$ est distinct de B$'$, alors il existe une unique similitude directe transformant A en A$'$ et B en B$'$.

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u}\,,\ \vec{v}\right)$, unité graphique 2 cm.

On note A, B, C, D et E les points d'affixes respectives

$$z_{\text{A}} = 2\text{i},\ z_{\text{B}} = 2,\ z_{\text{C}} = 4+6\text{i},\ z_{\text{D}} = -1+\text{i} \text{ et } z_{\text{E}} = -3+3\text{i}.$$

1. Placer les points sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure des questions.

2. Déterminer la nature du triangle ABC.

3. Soit f la similitude plane directe telle que $f(\text{A}) = \text{D}$ et $f(\text{B}) = \text{A}$.

a. Donner l'écriture complexe de f.

b. Déterminer l'angle, le rapport et le centre Ω de cette similitude.

c. Montrer que le triangle DAE est l'image du triangle ABC par la similitude f.

d. En déduire la nature du triangle DAE.

4. On désigne par (Γ_1) le cercIe de diamètre [AB] et par (Γ_2) le cercle de diamètre [AD].

On note M le second point d'intersection du cercle (Γ_1) et de la droite (BC), et N le second point d'intersection du cercle (Γ_2) et de la droite (AE).

a. Déterminer l'image de M par la similitude f.

b. En déduire la nature du triangle ΩMN.

c. Montrer que $M\text{B} \times N\text{E} = M\text{C} \times N\text{A}$.

Exercice 3 — 5 points

Commun à tous les candidats.

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

On considère les points : A(1 ; −1 ; 3), B(0 ; 3 ; 1), C(6 ; −7 ; −1), D(2 ; 1 ; 3) et E(4 ; −6 ; 2).

1. a. Montrer que le barycentre du système $\{(\text{A},\ 2),\ (\text{B}, -1),\ (C,\ 1)\}$ est le point E.

b. En déduire l'ensemble Γ des points M de l'espace tels que

$$\left\| 2\overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{C}} \right\| = 2\sqrt{21}.$$

2. a. Montrer que les points A, B et D définissent un plan.

b. Montrer que la droite (EC) est orthogonale au plan (ABD).

c. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABD).

3. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EC).

b. Déterminer les coordonnées du point F intersection de la droite (EC) et du plan (ABD).

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation*

Montrer que le plan (ABD) et l'ensemble Γ, déterminé à la question 1., sont sécants. Préciser les éléments caractéristiques de cette intersection.

Exercice 4 6 points

Commun à tous les candidats.

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

La courbe $(\mathscr{C})$, donnée en annexe, est la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur $[0~;~+\infty[$, de fonction dérivée f' continue sur $[0~;~+\infty[$.
La courbe $(\mathscr{C})$ passe par les points O et $\text{A}\left(1~;~\dfrac{1}{2\text{e}}\right)$ et, sur $[0~;~1]$, elle est au dessus du segment [OA].

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f'(x)\,\text{d}x = \dfrac{1}{2\text{e}}$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\text{d}x \geqslant \dfrac{1}{4\text{e}}$.

Partie B

On sait désormais que la fonction f considérée dans la partie A est définie sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x\text{e}^{-x}}{x^2+1}.$$

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2. On considère la fonction g définie sur $[0~;~+\infty[$ par : $g(x) = x^3 + x^2 + x - 1$.
   Établir que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
3. **a.** Montrer que pour tout x de $[0~;~+\infty[$, $f'(x)$ et $g(x)$ sont de signes contraires.
   b. En déduire les variations de f sur $[0~;~+\infty[$.
4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

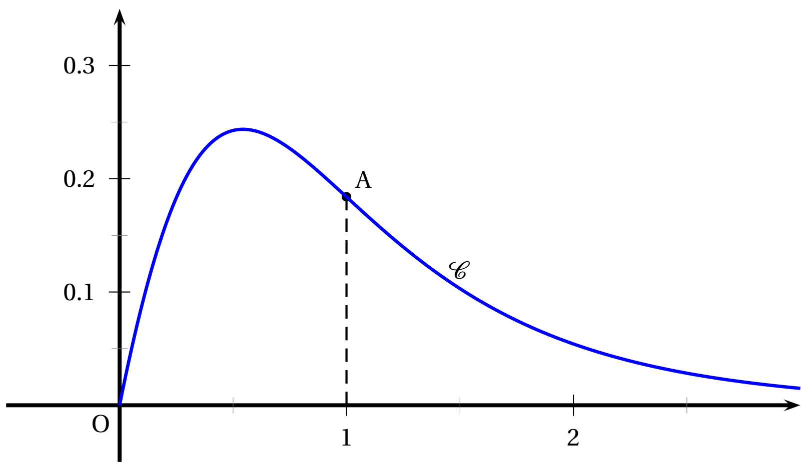
$$u_n = \int_n^{2n} f(x)\,\text{d}x.$$

   a. Montrer que pour tout x de $[0~;~+\infty[$, $0 \leqslant \dfrac{x}{x^2+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.
   b. Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\text{e}^{-n} - \text{e}^{-2n}\right)$.
   c. En déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

ANNEXE

Exercice 4

Cette page ne sera pas à rendre avec la copie



Baccalauréat S Métropole 23 juin 2009

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et, pour tout nombre entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4.$$

On pose, pour tout nombre entier naturel n, $v_n = u_n - 6$.

a. Pour tout nombre entier naturel n, calculer v_{n+1} en fonction de v_n. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

b. Démontrer que pour tout nombre entier naturel n, $u_n = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$.

c. Étudier la convergence de la suite (u_n).

2. On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout nombre entier $n \geqslant 1$:

$$nw_n = (n+1)w_{n-1} + 1 \quad \text{et} \quad w_0 = 1.$$

Le tableau suivant donne les dix premiers termes de cette suite.

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

a. Détailler le calcul permettant d'obtenir w_{10}.

b. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Donner la nature de la suite (w_n). Calculer w_{2009}.

EXERCICE 2 **6 points**
Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \ln\left(1 + x\mathrm{e}^{-x}\right).$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal. La courbe $\mathscr{C}$ est représentée en annexe 1 (à rendre avec la copie).

PARTIE I

1. Justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
2. Justifier que pour tout nombre réel positif x, le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - x$.
3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

PARTIE II

Soit λ un nombre réel strictement positif. On pose $\mathscr{A}(\lambda) = \displaystyle\int_0^{\lambda} f(x)\,\mathrm{d}x$. On se propose de majorer $\mathscr{A}(\lambda)$ à l'aide de deux méthodes différentes.

1. **Première méthode**
   - **a.** Représenter, sur l'annexe jointe (à rendre avec la copie), la partie du plan dont l'aire en unité d'aire, est égale à $\mathscr{A}(\lambda)$.
   - **b.** Justifier que pour tout nombre réel λ strictement positif, $\mathscr{A}(\lambda) \leqslant \lambda \times f(1)$.
2. **Deuxième méthode**
   - **a.** Calculer à l'aide d'une intégration par parties $\displaystyle\int_0^{\lambda} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ en fonction de λ.
   - **b.** On admet que pour tout nombre réel positif u, $\ln(1+u) \leqslant u$.
     Démontrer alors que, pour tout nombre réel λ strictement positif,
     $\mathscr{A}(\lambda) \leqslant -\lambda\mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda} + 1$.
3. **Application numérique**
   Avec chacune des deux méthodes, trouver un majorant de $\mathscr{A}(5)$, arrondi au centième. Quelle méthode donne le meilleur majorant dans le cas où $\lambda = 5$?

EXERCICE 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

I. *Cette question est une restitution organisée de connaissances.*
On rappelle que si n et p sont deux nombres entiers naturels tels que $p \leqslant n$ alors $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Démontrer que pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre entier naturel p tels que $1 \leqslant p \leqslant n$ on a : $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n-1}{p-1} + \dbinom{n-1}{p}$.

II. Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher :
7 jetons blancs numérotés de 1 à 7 et 3 jetons noirs numérotés de 1 à 3.
On tire simultanément deux jetons de ce sac.

1.
   - **a.** On note A l'évènement « obtenir deux jetons blancs ».
     Démontrer que la probabilité de l'évènement A est égale à $\dfrac{7}{15}$.
   - **b.** On note B l'évènement « obtenir deux jetons portant des numéros impairs ».
     Calculer la probabilité de B.
   - **c.** Les évènements A et B sont-ils indépendants ?
2. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de' jetons blancs obtenus lors de ce tirage simultané.
   - **a.** Déterminer la loi de probabilité de X.
   - **b.** Calculer l'espérance mathématique de X.

EXERCICE 4 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, on associe à tout point M d'affixe z non nulle, le point M' milieu du segment $[MM_1]$ où M_1 est le point d'affixe $\dfrac{1}{z}$.

Le point M' est appelé l'image du point M.

1. **a.** Montrer que les distances OM et OM_1 vérifient la relation $\text{O}M \times \text{O}M_1 = 1$ et que les angles $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\text{O}M_1}\right)$ et $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\text{O}M}\right)$ vérifient l'égalité des mesures suivantes $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\text{O}M_1}\right) = -\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\text{O}M}\right)$ à 2π près.

   b. Sur la figure donnée en annexe 2 (à rendre avec la copie) le point A appartient au cercle de centre O et de rayon 2.

   Construire le point A$'$ image du point A. (On laissera apparents les traits de construction).

2. **a.** Justifier que pour tout nombre complexe z non nul, le point M' a pour affixe $z' = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

   b. Soient B et C les points d'affixes respectives 2i et -2i. Calculer les affixes des points B$'$ et C$'$ images respectives des points B et C.

   c. Placer les points B, C, B$'$ et C$'$ sur la figure donnée en annexe 2 (à rendre avec la copie).

3. Déterminer l'ensemble des points M tels que $M' = M$.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Montrer que si le point M appartient au cercle de centre O et de rayon 1 alors son image M' appartient au segment [KL] où K et L sont les points d'affixes respectives -1 et 1.

EXERCICE 4 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1. **a.** Déterminer l'ensemble des couples (x,y) de nombres entiers relatifs, solution de l'équation (E) : $\quad 8x - 5y = 3$.

   b. Soit m un nombre entier relatif tel qu'il existe un couple $(p,\ q)$ de nombres entiers vérifiant $m = 8p + 1$ et $m = 5q + 4$.

   Montrer que le couple $(p,\ q)$ est solution de l'équation (E) et en déduire que $m \equiv 9 \pmod{40}$.

   c. Déterminer le plus petit de ces nombres entiers m supérieurs à 2 000.

2. **a.** Démontrer que pour tout nombre entier naturel k on a : $2^{3k} \equiv 1 \pmod{7}$.

   b. Quel est le reste dans la division euclidienne de 2^{2009} par 7 ?

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Soient a et b deux nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 avec $a \neq 0$.

   On considère le nombre $N = a \times 10^3 + b$. On rappelle qu'en base 10 ce nombre s'écrit sous la forme $N = \overline{a00b}$.

   On se propose de déterminer parmi ces nombres entiers naturels N ceux qui sont divisibles par 7.

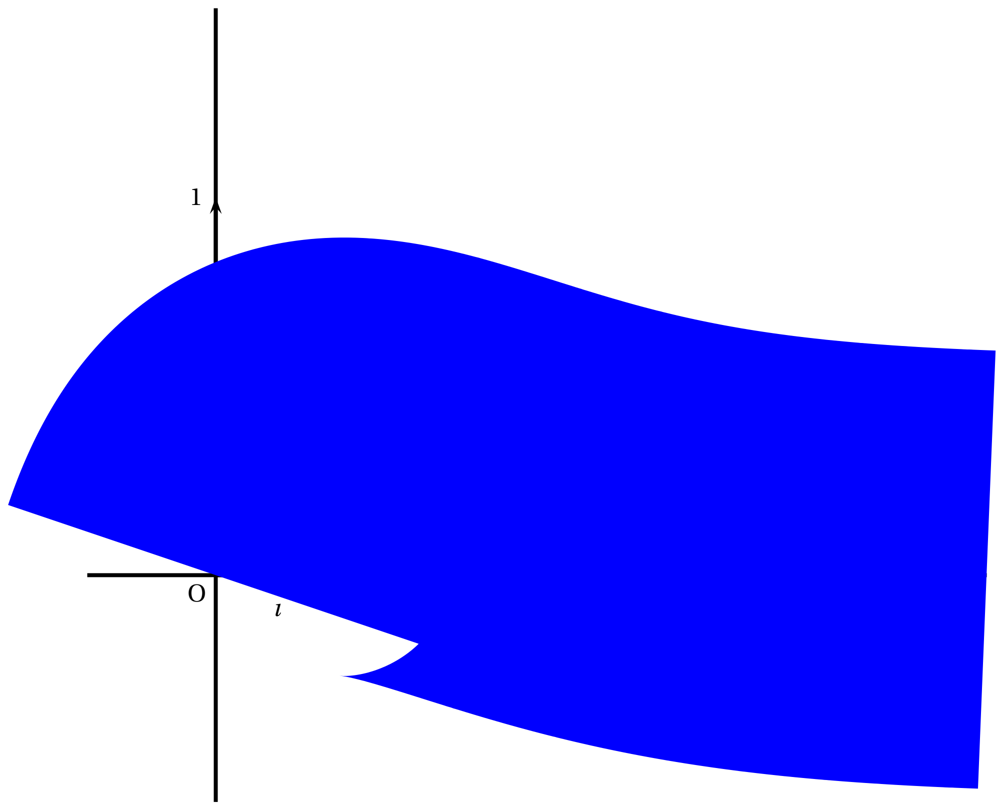
   a. Vérifier que $10^3 \equiv -1 \pmod{7}$.

   b. En déduire tous les nombres entiers N cherchés.

ANNEXE 1

Exercice 2

(À rendre avec la copie)

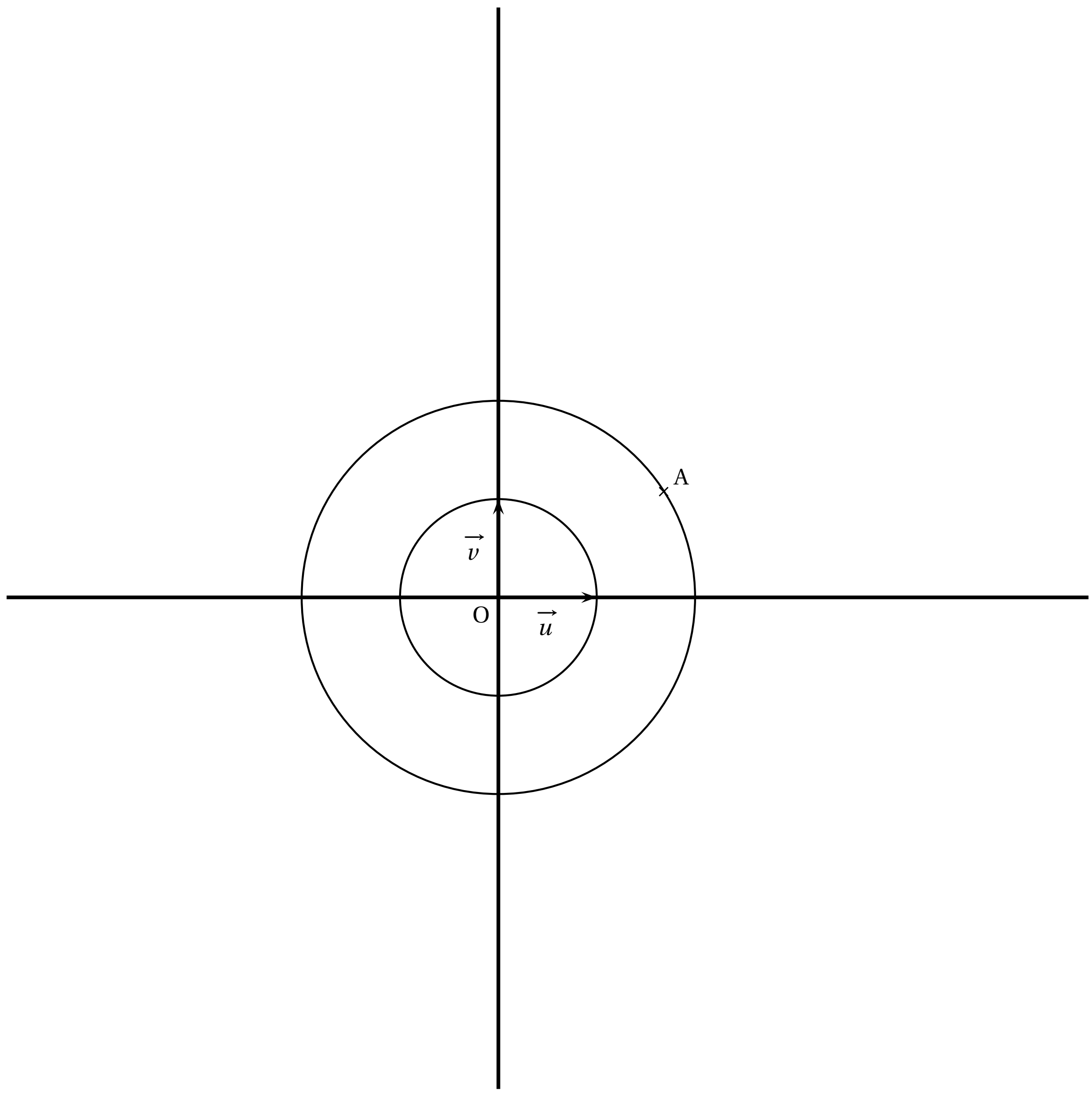


ANNEXE 2

Exercice 4

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

(À rendre avec la copie)



Durée : 4 heures

Baccalauréat S La Réunion 23 juin 2009

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).
Pour chaque question une seule des propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, la lettre correspondant à la réponse choisie. Il est attribué un point si la réponse est exacte, aucun point n'est enlevé pour une réponse inexacte ou une absence de réponse.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant : $z = 1 - 2\text{i} + \text{e}^{\text{i}\theta}$, θ étant un nombre réel.
   - **a.** (E) est une droite passant par le point d'affixe $2 - 2\text{i}$.
   - **b.** (E) est le cercle de centre d'affixe $-1 + 2\text{i}$ et de rayon 1.
   - **c.** (E) est le cercle de centre d'affixe $1 - 2\text{i}$ et de rayon 1.
   - **d.** (E) est le cercle de centre d'affixe $1 - 2\text{i}$ et de rayon $\sqrt{5}$.
2. Soit f l'application du plan qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = -\text{i}z - 2\text{i}$.
   - **a.** f est une homothétie.
   - **b.** Le point d'affixe $-1 - 2\text{i}$ est un antécédent du point d'affixe i.
   - **c.** f est la rotation de centre le point d'affixe $1 + \text{i}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
   - **d.** f est la rotation de centre le point d'affixe $-1 - \text{i}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
3. Soit (F) l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z - 1 + \text{i}| = |z + 1 + 2\text{i}|$.
   Soient les points A, B et C d' affixes respectives $1 - \text{i}$, $-1 + 2\text{i}$ et $-1 - 2\text{i}$.
   - **a.** C est un point de (F).
   - **b.** (F) est la médiatrice du segment [AB].
   - **c.** (F) est la médiatrice du segment [AC].
   - **d.** (F) est le cercle de diamètre [AB].
4. On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z + |z|^2 = 7 + \text{i}$.
   Cette équation admet :
   - **a.** Deux solutions distinctes qui ont pour partie imaginaire 1.
   - **b.** Une solution réelle.
   - **c.** Deux solutions dont une seule a pour partie imaginaire 1.
   - **d.** Une solution qui a pour partie imaginaire 2.

EXERCICE 2 **6 points**
Commun à tous les candidats

Soient f et g les fonctions définies sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x\text{e}^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2\text{e}^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les représentations graphiques des fonctions f et g dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f dans un repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ est donnée en annexe (à rendre avec la copie).

1. D'après le graphique, quelles semblent être les variations de la fonction f et sa limite en $+\infty$?
2. Valider ces conjectures à l'aide d'une démonstration.
3. Tracer sur l'annexe jointe (à rendre avec la copie) la courbe $\mathcal{C}_g$ représentative de la fonction g.
4. Quelle semble être la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la courbe $\mathcal{C}_g$?
   Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.

Partie B

L'objectif de cette partie est de calculer, en unités d'aire, la mesure de l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan comprise entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

1. Hachurer sur l'annexe cette partie du plan.
2. Soit $\text{I} = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\text{d}x$.
   Démontrer que $\text{I} = 1 - \dfrac{2}{\text{e}}$.
3. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Soit H la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par
   $$H(x) = -\left(x^2 + 2x\right)\text{e}^{-x}.$$
   a. Calculer la dérivée H' de la fonction H.
   b. En déduire une primitive sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ de la fonction g.
4. Déterminer la valeur exacte de l'aire $\mathcal{A}$.

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Une usine produit des sacs. Chaque sac fabriqué peut présenter deux défauts : le défaut a et le défaut b. Un sac est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.

1. Dans cette question les probabilités demandées seront données avec leurs valeurs décimales exactes.
   On prélève un sac au hasard dans la production d'une journée.
   On note A l' évènement « le sac présente le défaut a » et B l'évènement « le sac présente le défaut b ». Les probabilités des évènements A et B sont respectivement $P(A) = 0,02$ et $P(B) = 0,01$; on suppose que ces deux évènements sont indépendants.

a. Calculer la probabilité de l'évènement C « le sac prélevé présente le défaut a et le défaut b ».

b. Calculer la probabilité de l'évènement D « le sac est défectueux ».

c. Calculer la probabilité de l'évènement E « le sac ne présente aucun défaut ».

d. Sachant que le sac présente le défaut a, quelle est la probabilité qu'il présente aussi le défaut b ?

2. On suppose que la probabilité (arrondie au centième) qu'un sac soit défectueux est égale à $0,03$.

On prélève au hasard un échantillon de 100 sacs dans la production d'une journée. La production est suffisamment importante pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 sacs. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 100 sacs, associe le nombre de sacs défectueux.

a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b. Quelle est la probabilité de l'évènement « au moins un sac est défectueux » ? On arrondira cette probabilité au centième. Interpréter ce résultat.

c. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.

EXERCICE 4 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soient A(1 ; 2 ; 0), B(2 ; 2 ; 0), C(1 ; 3 ; 0) et D(1 ; 2 ; 1) quatre points de l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

(P) désigne le plan orthogonal à (BC) contenant A ;

(Q) désigne le plan orthogonal à (DC) contenant A ;

(R) désigne le plan orthogonal à (BD) contenant A.

1. Montrer que le plan (P) a pour équation cartésienne $x - y + 1 = 0$.

On admet que le plan (Q) a pour équation cartésienne $-y + z + 2 = 0$ et que le plan (R) a pour équation cartésienne $-x + z + 1 = 0$.

2. a. Résoudre le système : $\left\{\begin{array}{rcl} x - y + 1 & = & 0 \\ -y + z + 2 & = & 0 \\ -x + z + 1 & = & 0 \end{array}\right.$

b. En déduire que l'intersection des trois plans (P), (Q) et (R) est une droite (d) passant par le point E(2 ; 3 ; 1).

c. Vérifier que la droite (d) est orthogonale au plan (BCD).

En déduire une équation cartésienne du plan (BCD).

3. Déterminer une équation cartésienne pour chacun des plans (ABC), (ABD) et (ACD).

On admet que ces plans sont respectivement parallèles aux plans de repères $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{k}\right)$ *et* $\left(O ; \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

a. Montrer que tout point M de la droite (d) est équidistant des plans (ABC), (ABD) et (ACD).

b. Existe-t-il des points de l'espace équidistants des plans (ABC), (ABD), (ACD) et (BCD) ?

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

1. Soient F le point de coordonnées $\left(0\ ;\ 0\ ;\ \dfrac{1}{4}\right)$ et P le plan d'équation $z = -\dfrac{1}{4}$.

   On note $d(M,\ P)$ la distance d'un point M au plan P.

   Montrer que l'ensemble (S) des points M de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ qui vérifient $d(M,\ P) = M\text{F}$ a pour équation $x^2 + y^2 = z$.

2. **a.** Quelle est la nature de l'intersection de l'ensemble (S) avec le plan d'équation $z = 2$?

   b. Quelle est la nature de l'intersection de l'ensemble (S) avec le plan d'équation $x = 0$?

   Représenter cette intersection dans le repère $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

3. Dans cette question, x et y désignent des nombres entiers naturels.

   a. Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de x^2 par 7 ?

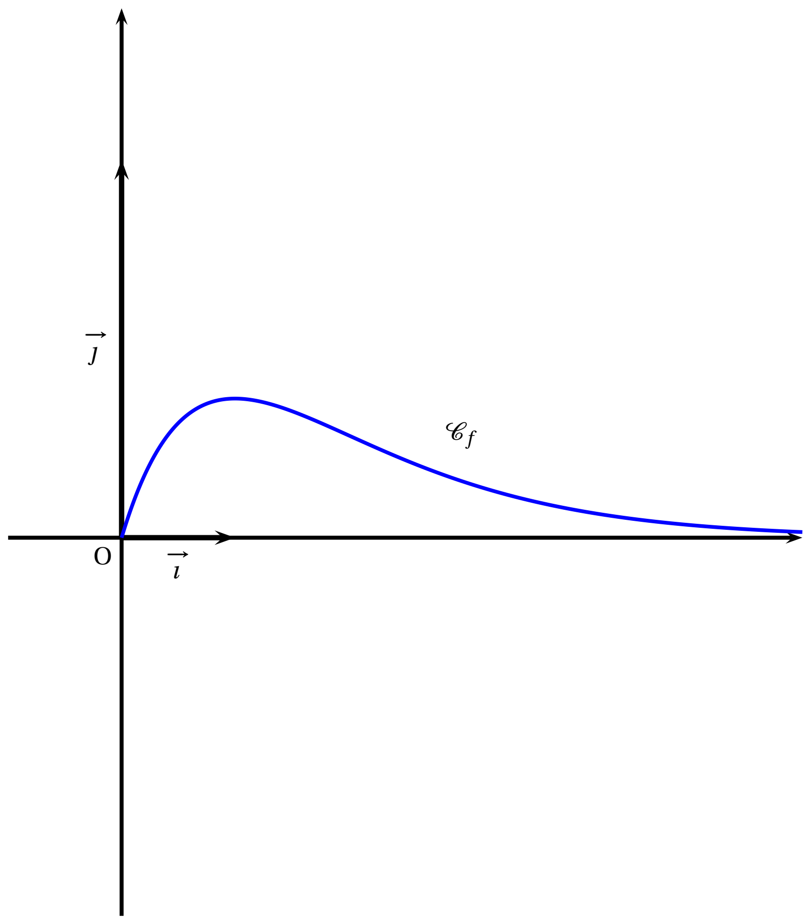
   b. Démontrer que 7 divise $x^2 + y^2$ si et seulement si 7 divise x et 7 divise y.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Existe-t-il des points qui appartiennent à l'intersection de l'ensemble (S) et du plan d'équation $z = 98$ et dont toutes les coordonnées sont des entiers naturels ? Si oui les déterminer.

ANNEXE Exercice 2

À rendre avec la copie



Baccalauréat S Antilles-Guyane 23 juin 2009

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, les résultats seront donnés sous forme de fractions.

On dispose de deux dés tétraédriques identiques : les quatre faces sont numérotées A,B,C et D.

1. On lance les deux dés simultanément et on note la lettre de la face sur laquelle repose chacun des dés.

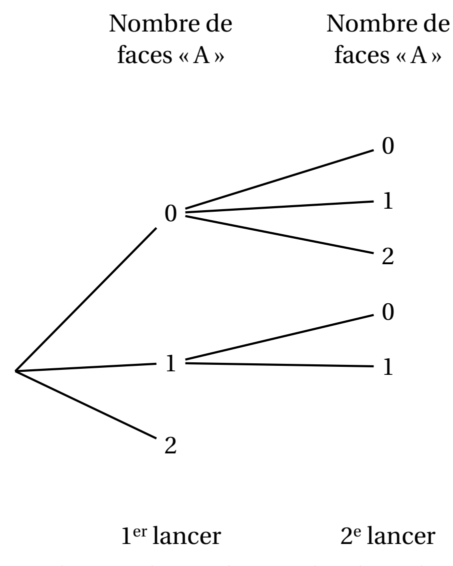
Déterminer la probabilité des évènements suivants :

- E_0 : « ne pas obtenir la lettre A »,
- E_1 : « obtenir une fois la lettre A »,
- E_2 : « obtenir deux fois la lettre A ».

2. On organise un jeu de la façon suivante :

- Le joueur lance les deux dés simultanément.
- Si les deux dés reposent sur les faces « A », le jeu s'arrête.
- Si un seul dé repose sur la face « A », le joueur relance l'autre dé et le jeu s'arrête.
- Si aucun dé ne repose sur la face « A », le joueur relance les deux dés et le jeu s'arrête.

a. Recopier et compléter l'arbre suivant en indiquant sur chaque branche la probabilité correspondante.



b. Le joueur gagne si, lorsque le jeu s'arrête, les deux dés reposent sur les faces « A ».

Montrer que, pour le joueur, la probabilité de gagner est de $\frac{49}{256}$.

c. Pour participer, le joueur doit payer 5 euros. S'il gagne, on lui donne 10 euros. Si, lorsque le jeu s'arrête, un seul dé repose sur la face « A », il est remboursé. Sinon, il perd sa mise.

Le jeu est-il favorable au joueur ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Dans chacun des cas suivants, indiquer si l'affirmation proposée est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = (1+\text{i}\sqrt{3})z + 2\sqrt{3}$.
On note A le point d'affixe 2i.

   Affirmation : f est la similitude directe, de centre A, d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de rapport 2.
2. **Affirmation :** $1991^{2009} \equiv 2\ (7)$.
3. a et b sont deux entiers relatifs quelconques, n et p sont deux entiers naturels premiers entre eux.

   Affirmation : $a \equiv b\ (p)$ si et seulement si $na \equiv nb\ (p)$.
4. L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
$\mathscr{E}$ est l'ensemble des points M de l'espace dont les coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ vérifient l'équation : $z = x^2 + y^2$. On note $\mathscr{S}$ la section de $\mathscr{E}$ par le plan d'équation $y = 3$.

   Affirmation : $\mathscr{S}$ est un cercle.
5. L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
$\mathscr{P}$ est la surface d'équation $x^2 + y^2 = 3z^2$.

   Affirmation : O le seul point d'intersection de $\mathscr{P}$ avec le plan $(y\text{O}z)$ à coordonnées entières.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Dans chacun des cas suivants, indiquer si l'affirmation proposée est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Soit le point A d'affixe 3, le point B d'affixe -4i et l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixe z tels que $|z-3| = |z+4\text{i}|$.

   Affirmation : $\mathscr{E}$ est la médiatrice du segment $[AB]$.
2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On considère trois points A, B et C deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b et c, tels que $\dfrac{c-a}{b-a} = 2\text{i}$.

   Affirmation : A appartient au cercle de diamètre $[BC]$.
3. On considère le nombre $z = 2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{7}}$.

   Affirmation : z^{2009} est un nombre réel positif.
4. On considère trois points A, B et C non alignés de l'espace. Le point G est le centre de gravité du trangle ABC.
On note $\mathscr{F}$ l'ensemble des points M vérifiant $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 6$.

   Affirmation : $\mathscr{F}$ est la sphère de centre de G et de rayon 2.

5. L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
$\mathcal{S}$ est la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 5$.
$\mathcal{P}$ est le plan d'équation $x + y - 5 = 0$.

Affirmation : Le plan $\mathcal{P}$ coupe la sphère $\mathcal{S}$ suivant un cercle.

EXERCICE 3 — 7 points

Commun à tous les candidats

PARTIE A.

La température de refroidissement d'un objet fabriqué industriellement est une fonction f du temps t.
f est définie sur l'ensemble des nombres réels positifs et vérifie l'équation différentielle :

$$f'(t) + \frac{1}{2}f(t) = 10.$$

La température est exprimée en degrés Celsius () et le temps t en heures.

1. Déterminer $f(t)$ pour $t \geqslant 0$, sachant que pour $t = 0$, la température de l'objet est 220 ° C.
2. On pourra admettre désormais que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(t) = 200\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} + 20.$$

   On note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthogonal ; les unités graphiques sont 2 cm pour un heure en abscisse et 1 cm pour vingt degrés Celsius en ordonnée.
   a. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^+$.
   b. Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.
   En déduire l'existence d'une asymptote $\mathcal{D}$ à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$.
   c. Construire $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[0 ; 7]$.
3. **a.** Utiliser le graphique pour déterminer une valeur approchée, en heures et minutes, du moment où la température de l'objet est 50 ° C. On laissera apparents les traits de construction.
   b. Retrouver ce résultat par le calcul.

PARTIE B.

On considère la suite de terme général $d_n = f(n) - f(n+1)$ où $n \in \mathbb{N}$. d_n représente l'abaissement de température de l'objet entre l'heure n et l'heure $n+1$.

1. **a.** Calculer des valeurs approchées au dixième de d_0, d_1 et d_2.
   b. Quelle est la limite de d_n quand n tend vers $+\infty$?
2. Déterminer la plus petite valeur de l'entier n à partir de laquelle l'abaissement de température est inférieur à 5 ° C.

EXERCICE 4 — 4 points

Commun à tous les candidats

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

1. On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \ln(1 + x).$$

a. En étudiant les variations de la fonction f, montrer que, pour tout réel x positif ou nul, $\ln(1 + x) \leqslant x$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(u_n) \leqslant 1$.

c. La suite (u_n) peut-elle avoir pour limite $+\infty$?

2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $v_n = \ln(u_n)$.

a. On pose $x = \dfrac{1}{n}$. Exprimer v_n en fonction de x.

b. Que vaut $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x}$? Aucune justification n'est demandée.

Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} v_n$.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.