Baccalauréat S 2011

L'intégrale de septembre 2010 à juin 2011

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

Baccalauréat S (obligatoire) Antilles-Guyane septembre 2010

EXERCICE 1 **7 points**

Commun à tous les candidats

PARTIE A - Restitution organisée des connaissances

On suppose connues la dérivée de la fonction exponentielle et la formule de dérivation de $u \circ v$ ainsi que ses conditions d'utilisation.
On suppose savoir que la fonction ln est dérivable sur $]0~;~+\infty[$ et que pour tout x de $]0~;~+\infty[$ on a : $\exp(\ln x) = x$.
À partir de ces quatre arguments, montrer que la dérivée de la fonction ln est la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ qui à x associe $\dfrac{1}{x}$.

PARTIE B - Étude de fonction

On considère la fonction f définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x + \frac{\ln x}{x}.$$

Le but du problème est l'étude de cette fonction et le calcul d'une aire.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 3 cm.

I - Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = x^2 + 1 - \ln x.$$

1. Étudier les variations de g sur $]0~;~+\infty[$.
2. En déduire le signe de g sur $]0~;~+\infty[$.

II - Étude de la fonction f et tracé de sa courbe représentative $\mathcal{C}$

1. Déterminer la limite en 0 de la fonction f. Quelle est l'interprétation graphique de ce résultat ?
2. Déterminer la limite en $+\infty$ de f puis montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.
3. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]0~;~+\infty[$.
4. En déduire le sens de variation de f sur $]0~;~+\infty[$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.
5. Déterminer le point A de la courbe $\mathcal{C}$ en lequel la tangente $\mathcal{T}$ est parallèle à la droite $\mathcal{D}$.
6. Dans le repère $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ tracer les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{T}$ et la courbe $\mathcal{C}$.

III - Calcul d'une aire

1. Montrer que $\displaystyle\int_1^{\text{e}} \frac{\ln x}{x}\,\text{d}x = \frac{1}{2}$.
2. En déduire l'aire de la région du plan délimitée par les droites d'équation $x =$ 1,
   $x = \text{e}$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}$. On exprimera cette aire en cm^2. Hachurer cette région sur le graphique.

Exercice 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

L'exercice comporte quatre propositions indépendantes.
Indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse choisie.

1. L'ensemble des points M d'affixe z du plan complexe rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, vérifiant $|z-2| = |z-2\mathrm{i}|$ est la droite d'équation $y = x$.
2. Si A, B et C sont trois points deux à deux distincts du plan complexe d'affixes $a,\ b$ et c vérifiant $\dfrac{b-a}{c-a} = -3$ alors A, B et C sont alignés.
3. L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

   La droite de l'espace passant par le point B de coordonnées $(2\,;3\,;4)$ et admettant le vecteur $\vec{u}\,(1\,;2\,;3)$ comme vecteur directeur a pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& t+1\\ y &=& 2t+1 \\ z &=& 3t+1\end{array}\right. \qquad t \in \mathbb{R}.$$

4. L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

   La sphère de centre $\mathrm{A}(1\,;1\,;1)$ et de rayon 10 est tangente au plan $\mathscr{P}$ d'équation $x+y+z-1 = 0$.

Exercice 3 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = -1,\ u_1 = \frac{1}{2} \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

1. Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
2. On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$

   a. Calculer v_0.

   b. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

   c. En déduire que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

   d. Exprimer v_n en fonction de n.

3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$$w_n = \frac{u_n}{v_n}.$$

   a. Calculer w_0.

   b. En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$, exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.

   c. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 2$.

d. Exprimer w_n en fonction de n.

4. Montrer que pour tout entier naturel n

$$u_n = \frac{2n-1}{2^n}.$$

5. Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

Démontrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}.$$

EXERCICE 4 **4 points**

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, les résultats approchés seront donnés à 0,000 1 près.

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.
Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 1 % est porteur de la maladie.
On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.
On note :

M l'évènement : « l'animal est porteur de la maladie » ;

T l'évènement : « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.

2. Un animal est choisi au hasard.

a. Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?

b. Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est $0,058$.

3. Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour qu'il soit porteur de la maladie ?

4. On choisit cinq animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise. On note X la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.

a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?

b. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif ?

5. Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 euros et le coût de l'abattage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1 000 euros. On suppose que le test est gratuit.

D'après les données précédentes, la loi de probabilité du coût à engager par animal subissant le test est donnée par le tableau suivant :

Coût	0	100	1 000
Probabilité	0,940 5	0,058 0	0,001 5

a. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire associant à un animal le coût à engager.

b. Un éleveur possède un troupeau de 200 bêtes. Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir d'engager ?

Baccalauréat S La Réunion septembre 2010

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les plans P et Q d'équations respectives :

$$x+y+z=0 \quad \text{et} \quad 2x+3y+z-4=0.$$

1. Montrer que l'intersection des plans P et Q est la droite D dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x & = & -4-2t \\ y & = & 4+t \\ z & = & t \end{array}\right. \text{ où } t \text{ est un nombre réel.}$$

2. Soit λ un nombre réel.
   On considère le plan P_λ d'équation : $(1-\lambda)(x+y+z)+\lambda(2x+3y+z-4)=0$.
   a. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{n}\,(1+\lambda\ ;\ 1+2\lambda\ ;\ 1)$ est un vecteur normal du plan P_λ.
   b. Donner une valeur du nombre réel λ pour laquelle les plans P et P_λ sont confondus.
   c. Existe-t-il un nombre réel λ pour lequel les plans P et P_λ sont perpendiculaires ?
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite D', intersection des plans P et P_{-1}.
   Montrer que les droites D et D'sont confondues.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   On considère le point A(1 ; 1 ; 1).
   Déterminer la distance du point A à la droite D, c'est-à-dire la distance entre le point A et son projeté orthogonal sur la droite D.

EXERCICE 2 **4 points**
Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).
Pour chaque question une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, le numéro de la question et la réponse choisie. Il est attribué un point si la réponse est exacte, aucun point n'est enlevé pour une réponse inexacte ou une absence de réponse.

Dans une fête foraine, Luc décide de participer à un jeu qui se déroule de la manière suivante :
Luc tire au hasard un jeton dans une urne contenant quatre jetons rouges et deux jetons bleus.

- Si le jeton tiré est bleu. Luc gagne et le jeu s'arrête ; sinon, sans remettre dans l'urne le premier jeton tiré, il tire au hasard un deuxième jeton dans l'urne.
- Si le deuxième jeton tiré est bleu, Luc gagne et le jeu s'arrête ; sinon, sans remettre dans l'urne les deux jetons précédents, il tire au hasard un troisième jeton dans l'urne.

- Si le troisième jeton est bleu, Luc gagne et le jeu s'arrête ; sinon, le jeu s'arrête et Luc a perdu.

1. La probabilité que Luc gagne à ce jeu à l'issue du deuxième tirage est :

- $\dfrac{19}{15}$ • $\dfrac{2}{5}$ • $\dfrac{11}{15}$ • $\dfrac{4}{15}$

2. La probabilité que Luc gagne à ce jeu à l'issue du troisième tirage est :

- $\dfrac{1}{5}$ • $\dfrac{1}{2}$ • $\dfrac{2}{15}$ • $\dfrac{1}{9}$

3. La probabilité que Luc gagne à ce jeu après avoir effectué au moins deux tirages est :

- $\dfrac{3}{5}$ • $\dfrac{4}{15}$ • $\dfrac{7}{15}$ • $\dfrac{1}{3}$

4. La probabilité que Luc gagne à ce jeu, sachant qu'il a obtenu un jeton rouge au premier tirage est :

- $\dfrac{7}{10}$ • $\dfrac{7}{15}$ • $\dfrac{11}{15}$ • $\dfrac{5}{9}$

EXERCICE 3 — 6 points

Commun à tous les candidats

Pour tout nombre réel k strictement positif, on considère la fonction f_k définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f_k(x) = \ln(x) - kx^2 + 1.$$

Partie A

1. Déterminer la limite de la fonction f_k en 0.

2. On rappelle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

Démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$.

En déduire la limite de la fonction f_k en $+\infty$.

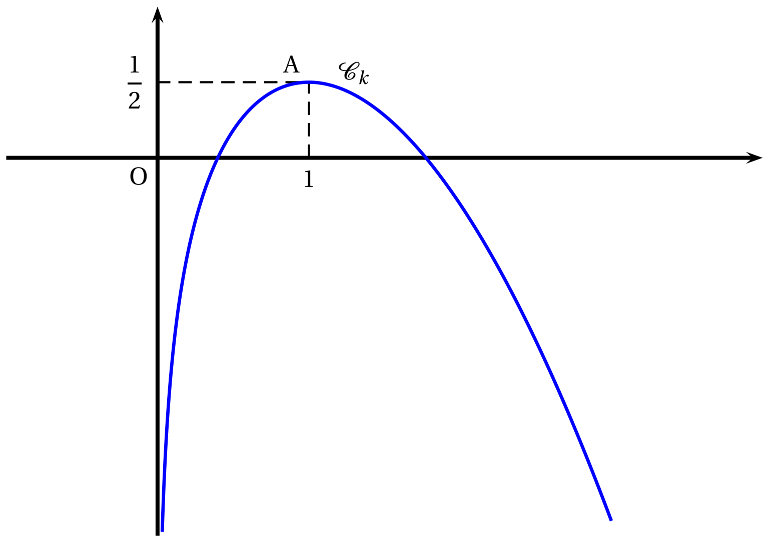
3. Montrer que, pour tout nombre réel x strictement positif, $f_k'(x) = \dfrac{1-2kx^2}{x}$.

4. Pour un nombre réel k strictement positif : on donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction f_k.

x	0	$\dfrac{1}{\sqrt{2k}}$	$+\infty$
$f_k(x)$	‖ ↗	$\dfrac{1-\ln(2k)}{2}$	↘

Justifier les renseignements sur les variations de la fonction f_k figurant dans ce tableau.

5. On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_k$ représentative d'une fonction f_k pour une certaine valeur du nombre réel k strictement positif. Le point $\text{A}\left(1\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_k$.
Quelle est la valeur du nombre réel k correspondant ? Justifier la démarche.



Partie B

Dans cette partie on pose $k = \dfrac{1}{2}$.

1. Calculer $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln(x)\,\mathrm{d}x$. On pourra utiliser une intégration par parties.
2. Calculer, en unité d'aire, la mesure de l'aire du domaine délimité par la courbe représentative de la fonction $f_{\frac{1}{2}}$ l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \dfrac{1}{2}$ et $x = 1$.

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$; unité graphique : 8 centimètres.
On considère la transformation f du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = \frac{\sqrt{2}}{4}(-1+\text{i})z.$$

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f.
2. On définit la suite de points (M_n) de la façon suivante : M_0 est le point d'affixe $z_0 = 1$ et, pour tout nombre entier naturel n, $M_{n+1} = f(M_n)$. On note z_n l'affixe du point M_n.
   a. Justifier que, pour tout nombre entier naturel n, $z_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{3n\pi}{4}\right)}$
   b. Construire les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative meme non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Soient n et p deux entiers naturels. À quelle condition sur n et p les points M_n et M_p sont-ils alignés avec l'origine O du repère ?

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$; unité graphique : 4 centimètres.

On considère la transformation f du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+\text{i})z.$$

1. Montrer que la transformation f est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle.

2. On définit la suite de points (M_n) de la façon suivante : M_0 est le point d'affixe $z_0 = 1$ et, pour tout nombre entier naturel n, $M_{n+1} = f(M_n)$. On note z_n l'affixe du point M_n.

  a. Justifier que, pour tout nombre entier naturel n, $z_n = \text{e}^{\text{i}\left(\frac{3n\pi}{4}\right)}$.

  b. Construire les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4.

  c. Montrer que pour tout nombre entier naturel n, les points M_n et M_{n+8} sont confondus.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Prouver que les triangles $M_0M_1M_2$ et $M_7M_0M_1$ ont la même aire. Préciser la valeur exacte de cette aire.

Baccalauréat S Métropole 16 septembre 2010

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x(1 - \ln x).$$

La courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f est donnée en annexe 1 (à rendre avec la copie).

Partie 1 : Étude de la fonction f

1. Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x.
2. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ et dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
4. Soit a un nombre réel strictement positif. On considère la tangente (T_a) au point A de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisse a.
   a. Déterminer, en fonction du nombre réel a, les coordonnées du point A$'$, point d'intersection de la droite (T_a) et de l'axe des ordonnées.
   b. Expliciter une démarche simple pour la construction de la tangente (T_a). Sur l'annexe 1 (à rendre avec la copie) construire la tangente (T_a) au point A placé sur la figure.

Partie II : Un calcul d'aire

Soit a un nombre réel strictement positif. On note $\mathcal{A}(a)$ la mesure, en unité d'aire, de l'aire de la région du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = \text{e}$.

1. Justifier que $\mathcal{A}(a) = \displaystyle\int_a^{\text{e}} f(x)\,\text{d}x$, en distinguant le cas $a < \text{e}$ et le cas $a > \text{e}$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\mathcal{A}(a)$ en fonction de a.

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout nombre entier naturel n, par $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.

Si f est la fonction définie sur l'intervalle $]-2~;~+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+2}$, alors on a, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
On donne en annexe 2 (à rendre avec la copie) une partie de la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.

1. **a.** Sur l'axe des abscisses, placer u_0 puis construire u_1, u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction.
   b. Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n) ?
2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n, on a $u_n - 1 > 0$.

b. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Valider par une démonstration les conjectures émises à la question 1. b.

3. Dans cette question, on se propose d'étudier la suite (u_n) par une autre méthode, en déterminant une expression de u_n en fonction de n.
Pour tout nombre entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$.

b. Pour tout nombre entier naturel n, exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c. En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
Soit $(\mathscr{P})$ le plan d'équation : $3x+y-z-1=0$ et $(\mathscr{D})$ la droite dont une représentation paramétrique est

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -t+1 \\ y & = & 2t \\ z & = & -t+2 \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ désigne un nombre réel.}$$

1. **a.** Le point C(1 ; 3 ; 2) appartient-il au plan $(\mathscr{P})$? Justifier.

b. Démontrer que la droite $(\mathscr{D})$ est incluse dans le plan $(\mathscr{P})$.

2. Soit $(\mathscr{Q})$ le plan passant par le point C et orthogonal à la droite $(\mathscr{D})$.

a. Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathscr{Q})$.

b. Calculer les coordonnées du point I, point d'intersection du plan $(\mathscr{Q})$ et de la droite $(\mathscr{D})$.

c. Montrer que $\text{CI} = \sqrt{3}$.

3. Soit t un nombre réel et M_t le point de la droite $(\mathscr{D})$ de coordonnées $(-t+1\ ;\ 2t\ ;\ -t+2)$.

a. Vérifier que pour tout nombre réel t, $\text{C}M_t^2 = 6t^2 - 12t + 9$.

b. Montrer que CI est la valeur minimale de $\text{C}M_t$ lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels.

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

1. On considère le point I d'affixe i et le point A d'affixe $z_\text{A} = \sqrt{3} + 2\text{i}$.

a. Montrer que le point A appartient au cercle Γ de centre le point I et de rayon 2.
Sur une figure (unité graphique 1 cm), qu'on complètera au fur et à mesure de l'exercice, placer le point I, tracer le cercle Γ, puis construire le point A.

b. On considère la rotation r de centre le point I et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
Démontrer que le point B image du point A par la rotation r a pour affixe $z_\text{B} = -1 + \text{i}\left(\sqrt{3}+1\right)$.
Justifier que le point B appartient au cercle Γ.

c. Calculer l'affixe du point C symétrique du point A par rapport au point I.

d. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

On considère les points E et F tels que : $\overrightarrow{\text{AE}} = \overrightarrow{\text{IB}}$ et $\overrightarrow{\text{AF}} = \overrightarrow{\text{BI}}$.

Que peut-on conjecturer pour les droites (BF) et (CE) ?

Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, on considère les deux rectangles OABC et DEFG où les points A, B, C, D, E, F, G ont pour affixes respectives

$$z_{\text{A}} = -2,\ z_{\text{B}} = -2+\text{i},\ z_{\text{C}} = \text{i},\ z_{\text{D}} = 1,\ z_{\text{E}} = 1+3\text{i},\ z_{\text{F}} = \frac{5}{2}+3\text{i}, z_{\text{G}} = \frac{5}{2}.$$

Voir la figure donnée en annexe 3.

1. On considère la similitude directe s transformant O en D et A en E.

a. Justifier que l'écriture complexe de la similitude s est : $z' = -\frac{3}{2}\text{i}z + 1$.

b. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude s.

c. Quelle est l'image du rectangle OABC par la similitude s ?

2. On considère la similitude indirecte s' d'écriture complexe $z' = -\frac{2}{3}\text{i}\overline{z} + \frac{5}{3}\text{i}$.

a. Déterminer l'image du rectangle DEFG par la similitude s'.

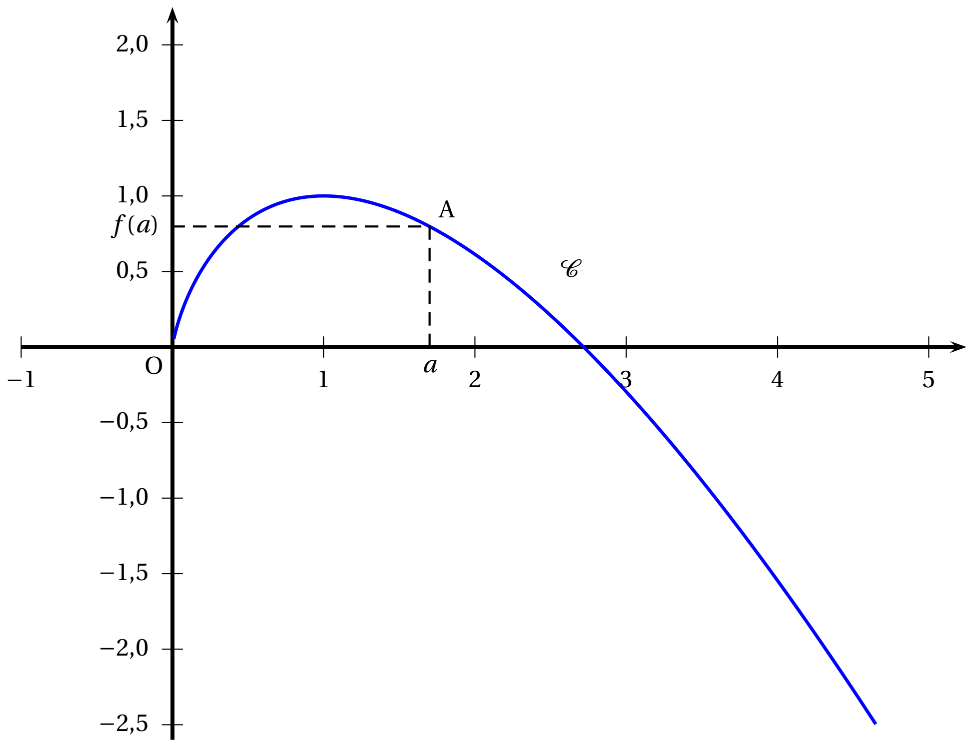
b. On considère la similitude $g = s' \circ s$.

Déterminer l'image du rectangle OABC par la similitude g.

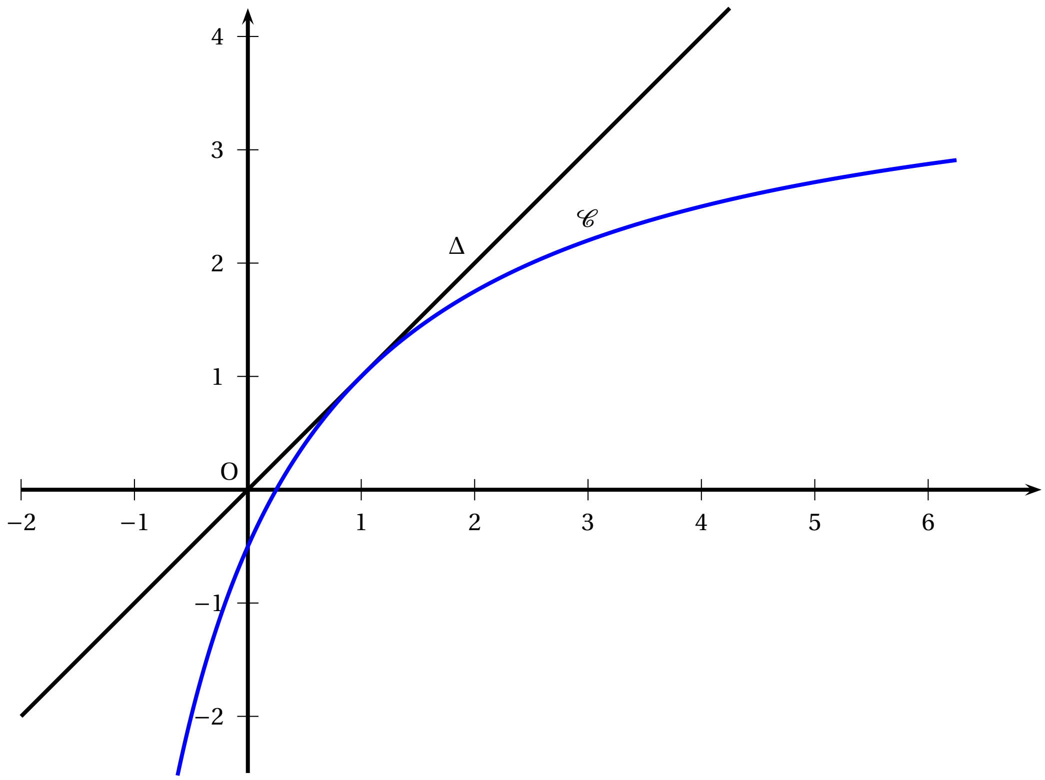
c. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

La similitude g a-t-elle des points fixes ? Que peut-on en conclure pour g ?

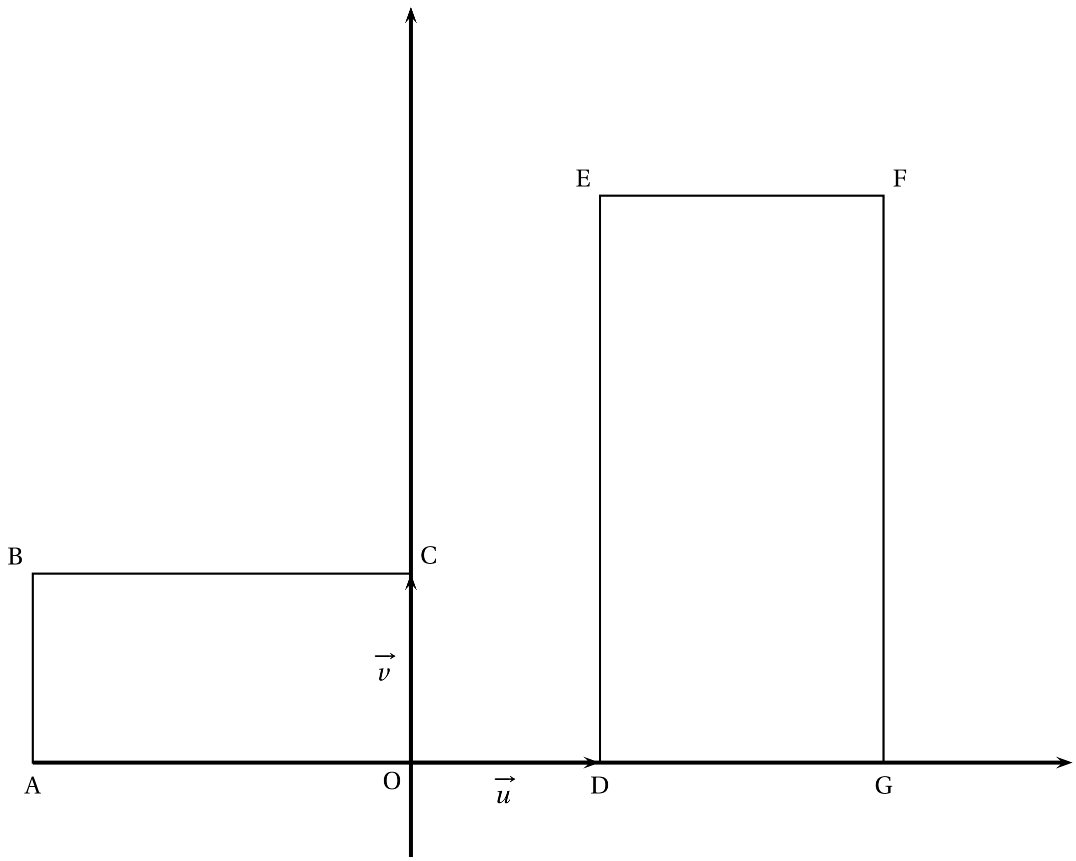
ANNEXE 1 (Exercice 1)
(à rendre avec la copie)



ANNEXE 2 (Exercice 2)
(à rendre avec la copie)



ANNEXE 3 (Exercice 4)
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité



Baccalauréat S (obligatoire) Polynésie septembre 2010

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. On considère la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$t_0 = 0 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ t_{n+1} = t_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Proposition 1 : Pour tout entier naturel n, $t_n = \dfrac{n}{n+1}$.

2. On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies sur $\mathbb{N}$ telles que :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n \leqslant w_n \leqslant v_n.$$

Proposition 2 : Si les suites (u_n)et (v_n) sont adjacentes alors la suite (w_n) est convergente.

3. Soient f et g deux fonctions définies et continues sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

Proposition 3 : Si $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$ alors $f = g$ sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ (unité : 1 cm).
On fera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

On considère les points A, B, S et Ω d'affixes respectives $a = -2+4\mathrm{i}$, $b = -4+2\mathrm{i}$, $s = -5+5\mathrm{i}$ et $\omega = -2+2\mathrm{i}$.

Soit h l'homothétie de centre S et de rapport 3.
On appelle C l'image du point A par h et D l'image du point B par h.

1. a. Déterminer l'écriture complexe de h.
   b. Démontrer que le point C a pour affixe $c = 4+2\mathrm{i}$ et que le point D a pour affixe $d = -2-4\mathrm{i}$.
2. Démontrer que les points A, B, C et D sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
3. Démontrer que la droite (SΩ) est la médiatrice du segment [AB].
4. Soit P le milieu du segment [AC].
   a. Déterminer l'affixe p du point P.
   b. Démontrer que $\dfrac{\omega - p}{d - b} = -\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$. En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{BD}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{P}\Omega}\right)$.
5. Soit Q le milieu du segment [BD].
   Que représente le point Ω pour le triangle PQS ?

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Un jeu consiste à tirer simultanément 4 boules indiscernables au toucher d'un sac contenant une boule noire et 9 boules blanches, puis à lancer un dé bien équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.
Si la boule noire est tirée, il faut obtenir un nombre pair avec le dé pour gagner. Si la boule noire n'est pas tirée, il faut obtenir un six avec le dé pour gagner.
On appelle N l'évènement « la boule noire figure parmi les boules tirées » et G l'évènement « le joueur gagne ».

1. **a.** Déterminer la probabilité de l'évènement N.
   b. Démontrer que la probabilité de l'évènement G est égale à $\dfrac{3}{10}$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
   c. Le joueur ne gagne pas. Quelle est la probabilité qu'il ait tiré la boule noire ?
2. Pour jouer à ce jeu, une mise de départ de m euros est demandée, où m est un réel strictement positif.

   Si le joueur gagne, il reçoit 4 euros.

   S'il ne gagne pas mais qu'il a tiré la boule noire, le joueur récupère sa mise.

   S'il ne gagne pas et qu'il n'a pas tiré la boule noire, le joueur perd sa mise.

   On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur.
   a. Déterminer la loi de probabilité de X.
   b. Exprimer l'espérance mathématique de X en fonction de m.
   c. On dit que le jeu est équitable si l'espérance mathématique de X est nulle.
   Déterminer m pour que le jeu soit équitable.
3. Soit n un entier naturel non nul.
   On joue n fois à ce jeu sachant qu'après chaque partie les boules sont remises dans le sac.
   Déterminer la valeur minimale de n pour laquelle la probabilité de gagner au moins une fois est supérieure à $0,999$.

EXERCICE 4 **7 points**
Commun à tous les candidats

Partie 1

Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 1$.

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction g.
3. Donner le tableau de variations de g.
4. **a.** Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[0\,;\,+\infty[$ une unique solution. On note α cette solution.
   b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
   c. Démontrer que $\mathrm{e}^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.
5. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie 2

Soit A la fonction définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ telle que $A(x) = \dfrac{4x}{\text{e}^x + 1}$.

1. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie 1.
2. En déduire les variations de la fonction A sur $[0\,;\,+\infty[$.

Partie 3

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4}{\text{e}^x + 1}$.

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

La figure est donnée en annexe.

Pour tout réel x positif ou nul, on note :

M le point de $(\mathcal{C})$ de coordonnées $(x\,;\,f(x))$,

P le point de coordonnées $(x\,;\,0)$,

Q le point de coordonnées $(0\,;\,f(x))$.

1. Démontrer que l'aire du rectangle OPMQ est maximale lorsque M a pour abscisse α.

   On rappelle que le réel α a été défini dans la partie 1.
2. Le point M a pour abscisse α.

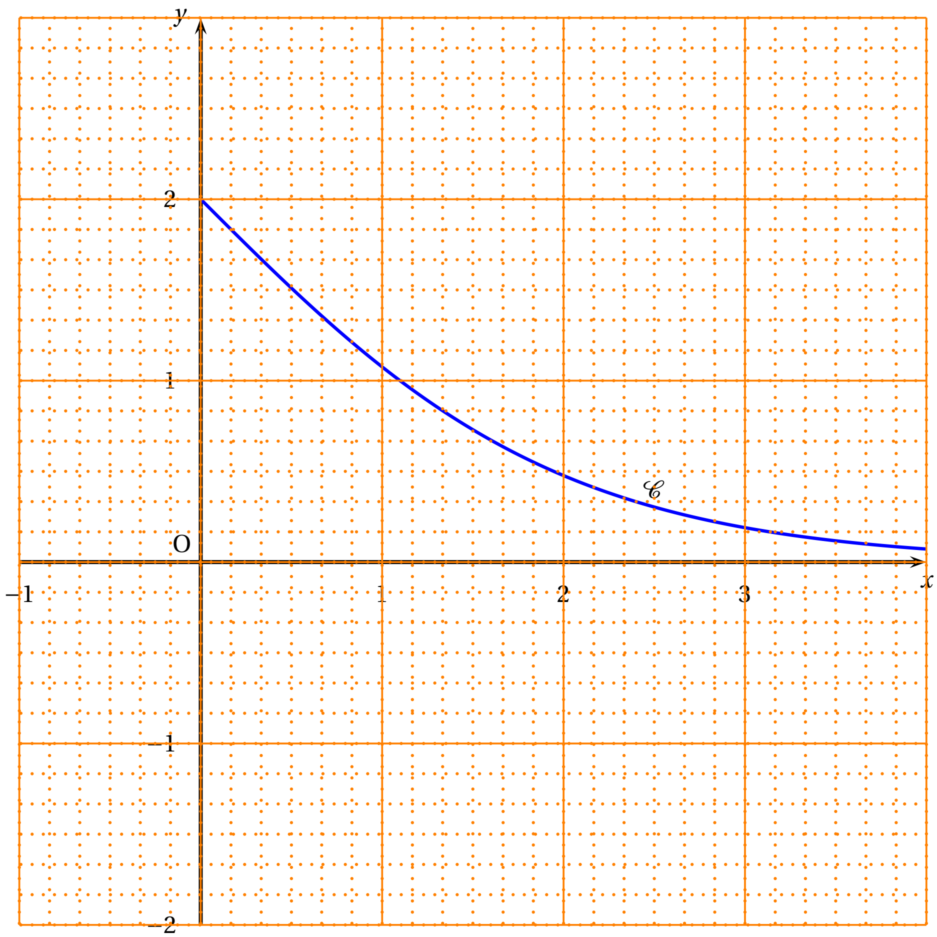
   La tangente (T) en M à la courbe $(\mathcal{C})$ est-elle parallèle à la droite (PQ) ?

   Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

ANNEXE

Cette page ne sera pas à rendre avec la copie.

Exercice 4



Durée : 4 heures

Baccalauréat S Amérique du Sud Novembre 2010

Exercice 1 5 points

Commun à tous les candidats

On admet que si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont deux droites non coplanaires, il existe une unique droite Δ perpendiculaire à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. Si Δ coupe $\mathscr{D}$ en le point I et $\mathscr{D}'$ en le point J, la distance IJ est appelée distance de $\mathscr{D}$ à $\mathscr{D}'$.

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

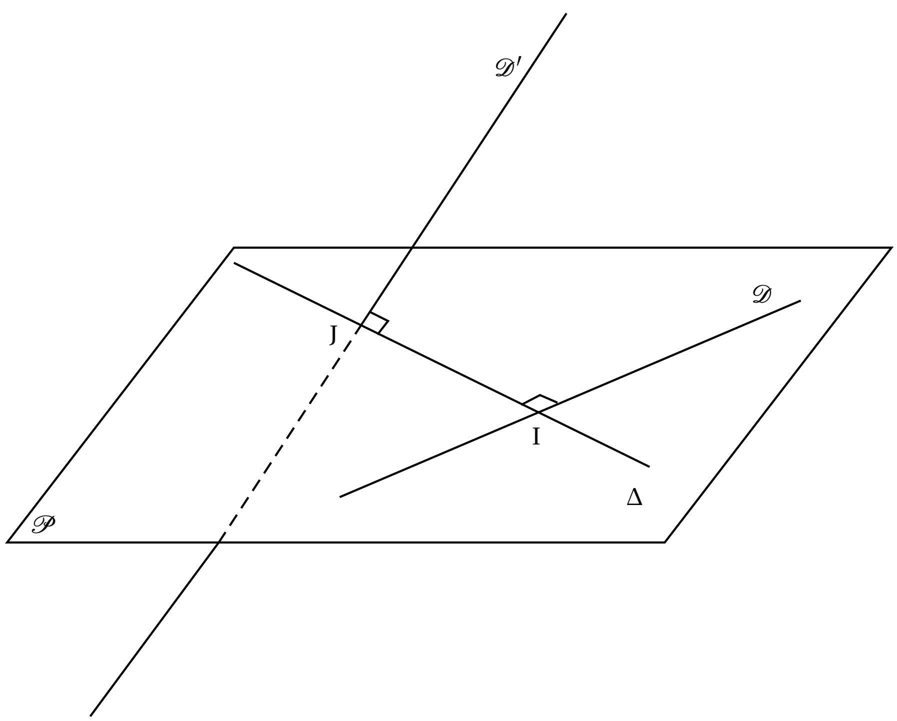
On note $\mathscr{D}$ la droite des abscisses et $\mathscr{D}'$, la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l c r} x & = & -t \\ y & = & 3+3t \\ z & = & 1-t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$.

1. Justifier que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas coplanaires.
2. On considère la droite Δ perpendiculaire commune à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. Prouver qu'il existe deux réels b et c tels que le vecteur $\vec{w} = b\vec{\jmath} + c\vec{k}$ soit un vecteur directeur de Δ.
3. **a.** Vérifier que le plan $\mathscr{P}$ d'équation : $-3y + z = 0$ est un plan contenant la droite $\mathscr{D}$.

   b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection J de la droite $\mathscr{D}'$ et du plan $\mathscr{P}$.

   c. Justifier que la droite passant par J, de vecteur directeur $\vec{w}$ est sécante à $\mathscr{D}$ en un point I et qu'elle est la perpendiculaire commune à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

   d. En déduire la distance de $\mathscr{D}$ à $\mathscr{D}'$.



Exercice 2 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Soit A, B et P les points d'affixes respectives $a = 5+5\mathrm{i}$, $b = 5-5\mathrm{i}$ et $p = 10$.
On considère un point M, distinct de O, d'affixe z.
On note U le point d'affixe u, image du point M par la rotation R_{A} de centre A et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{2}$.
On note T le point d'affixe t, image du point M par la rotation R_{B} de centre B et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$.
Soit D le symétrique du point M par rapport à O.

1. Démontrer que l'affixe du point U est $u = \mathrm{i}(10-z)$; exprimer en fonction de z l'affixe du point T puis justifier que le quadrilatère $MUDT$ est un parallélogramme de centre O.
2. Déterminer l'ensemble Γ des points M d'affixe z tels que : $z\overline{z} - 5z - 5\overline{z} = 0$.
   Justifier que le quadrilatère OAPB est inscrit dans Γ.
3. On suppose que le point M est distinct de O, A et P. Les points O, M et U sont donc distincts deux à deux.
   a. Démontrer que les points O, M et U sont alignés si et seulement si $\dfrac{u}{z} = \dfrac{\overline{u}}{\overline{z}}$.
   b. Démontrer que les points O, M et U sont alignés si et seulement si M appartient à Γ.
4. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que OMU soit un triangle isocèle en O. Quelle est dans ce cas la nature du quadrilatère $MUDT$?
5. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $\dfrac{u}{z}$ soit un imaginaire pur. En déduire la nature du quadrilatère $MUDT$ dans le cas où M est un point de la droite (OP) privée de O et P.
   Prouver finalement qu'il existe une unique position du point M tel que $MUDT$ soit un carré.

Exercice 2 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $A(n) = n^4 + 1$.
L'objet de l'exercice est l'étude des diviseurs premiers de $A(n)$.

1. Quelques résultats
   a. Étudier la parité de l'entier $A(n)$.
   b. Montrer que, quel que soit l'entier n, $A(n)$ n'est pas un multiple de 3.
   c. Montrer que tout entier d diviseur de $A(n)$ est premier avec n.
   d. Montrer que, pour tout entier d diviseur de $A(n)$:
   $$n^8 \equiv 1 \pmod{d}.$$
2. Recherche de critères
   Soit d un diviseur de $A(n)$. On note s le plus petit des entiers naturels non nuls k tels que $n^k \equiv 1 \pmod{d}$.

a. Soit k un tel entier. En utilisant la division euclidienne de k par s, montrer que s divise k.

b. En déduire que s est un diviseur de 8.

c. Montrer que si, de plus, d est premier, alors s est un diviseur de $d-1$. On pourra utiliser le petit théorème de Fermat.

3. Recherche des diviseurs premiers de $A(n)$ dans le cas où n est un entier pair.

Soit p un diviseur premier de $A(n)$. En examinant successivement les cas $s = 1$, $s = 2$ puis $s = 4$, conclure que p est congru à 1 modulo 8.

4. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Appliquer ce qui précède à la recherche des diviseurs premiers de $A(12)$.

Indication : la liste des nombres premiers congrus à 1 modulo 8 débute par 17, 41, 73, 89, 97, 113, 137, ...

Exercice 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

Un internaute souhaite faire un achat par l'intermédiaire d'internet. Quatre sites de vente, un français, un allemand, un canadien et un indien présentent le matériel qu'il souhaite acquérir. L'expérience a montré que la probabilité qu'il utilise chacun de ces sites vérifie les conditions suivantes (les initiales des pays désignent les évènements « l'achat s'effectue dans le pays ») :

$$P(F) = P(A), \quad P(F) = \frac{1}{2}P(C) \quad \text{et} \quad P(C) = P(I).$$

1. Calculer les quatre probabilités $P(F)$, $P(A)$, $P(C)$ et $P(I)$.

2. Sur chacun des quatre sites, l'internaute peut acheter un supplément pour son matériel. Ses expériences précédentes conduisent à formuler ainsi les probabilités conditionnelles de cet évènement, noté S :

$$P_F(S) = 0,2 \quad ; \quad P_A(S) = 0,5 \quad ; \quad P_C(S) = 0,1 \quad ; \quad P_I(S) = 0,4$$

a. Déterminer $P(S \cap A)$.

b. Montrer que $p(S) = \dfrac{17}{60}$.

c. L'internaute a finalement acheté un supplément. Déterminer la probabilité qu'il l'ait acheté sur le site canadien.

3. Sur 1 000 internautes ayant acheté ce matériel, on a établi la statistique suivante :

	Sites européens	Site canadien	Site indien
Effectif d'acheteurs	335	310	355

a. On note respectivement f_1, f_2 et f_3 les fréquences associées aux effectifs précédents. On pose :

$d^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=3}\left(f_k - \frac{1}{3}\right)^2$. Calculer d^2 puis $1000d^2$.

b. On simule 3 000 fois l'expérience consistant à tirer un nombre au hasard parmi {1 ; 2 ; 3} avec équiprobabilité. Pour chacune de ces simulations on obtient une valeur de $1\,000d^2$. Voici les résultats :

Minimum	Premier décile	Premier quartile	Médiane	Troisième quartile	Neuvième décile	Maximum
0,000 5	0,076 3	0,211 1	0,488 45	0,940 1	1,510 4	5,925 6

Au risque 10 %, peut-on considérer que le choix d'un site européen, nord-américain ou asiatique se fait de manière équiprobable ?

Exercice 4 5 points

Commun à tous les candidats

Le but de l'exercice est de donner un encadrement du nombre I défini par :

$$I = \int_0^1 \frac{x^2\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x}$.

1. Étudier les variations de f sur $[0\,;\,1]$.

2. On pose, pour tout entier naturel $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{5}\right)$.

a. Justifier que pour tout entier k compris entre 0 et 4, on a :

$$\frac{1}{5}f\left(\frac{k}{5}\right) \leqslant \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{5}f\left(\frac{k+1}{5}\right)$$

Interpréter graphiquement à l'aide de rectangles les inégalités précédentes.

b. En déduire que : $\dfrac{1}{5}S_4 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{5}\left(S_5 - 1\right)$.

c. Donner des valeurs approchées à 10^{-4} près de S_4 et de S_5 respectivement.

En déduire l'encadrement : $1,091 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant 1,164$.

3. **a.** Démontrer que pour tout réel x de $[0\,;\,1]$, on a : $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{1+x}$.

b. Justifier l'égalité $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x + I$.

c. Calculer $\displaystyle\int_0^1 (1-x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

d. En déduire un encadrement de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x$ d'amplitude strictement inférieure à 10^{-1}.

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie 15 novembre 2010

EXERCICE 1 **7 points**

Commun à tous les candidats

PARTIE A : restitution organisée de connaissances

On suppose connus les résultats suivants :

Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle $[a~;~b]$ avec $a < b$

- ⋆ si pour tout $x \in [a~;~b]$ $\quad u(x) \geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$
- ⋆ $\displaystyle\int_a^b [u(x) + v(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$
- ⋆ $\displaystyle\int_a^b \alpha u(x)\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x$ où α est un nombre réel.

Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a~;~b]$ avec $a < b$ et si pour tout x de $[a~;~b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

PARTIE B :

Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $[1~;~+\infty[$ par

$$\varphi(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x.$$

1. **a.** Étudier le sens de variation de la fonction φ sur l'intervalle $[1~;~+\infty[$.

   b. Calculer $\varphi(\mathrm{e})$. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1~;~\mathrm{e}]$. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

   c. Déterminer le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{1 + x^2}.$$

   On note f' la fonction dérivée de f.

   a. Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout $x \geqslant 1$ on a : $f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x\left(1 + x^2\right)^2}$.

   b. Déduire de la question 1. le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[1~;~+\infty[$.

   c. Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[1~;~+\infty[$ on a :

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{\ln x}{x^2}.$$

   d. En déduire $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

3. **a.** À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}}$.

b. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f, dans un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

Soit $\mathscr{A}$ l'aire exprimée en cm^2 du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \text{e}$.

Déterminer un encadrement de $\mathscr{A}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_{\text{A}} = -2\text{i}, \quad z_{\text{B}} = -\sqrt{3} + \text{i} \;\text{ et }\; z_{\text{C}} = \sqrt{3} + \text{i}.$$

1. **a.** Écrire z_{A}, z_{B} et z_{C} sous forme exponentielle.

   b. En déduire le centre et le rayon du cercle Γ passant par les points A, B et C.

   c. Faire une figure et placer le point A, tracer le cercle Γ puis placer les points B et C.

2. **a.** Écrire le quotient $\dfrac{z_{\text{B}} - z_{\text{A}}}{z_{\text{C}} - z_{\text{A}}}$ sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

   b. En déduire la nature du triangle ABC.

3. On note r la rotation de centre A et d'angle mesurant $\dfrac{\pi}{3}$ radians.

   a. Montrer que le point O$'$, image de O par r, a pour affixe $-\sqrt{3} - \text{i}$.

   b. Démontrer que les points C et O$'$ sont diamétralement opposés sur le cercle Γ.

   c. Tracer l'image Γ' du cercle Γ par la rotation r.

   d. Justifier que les cercles Γ et Γ' se coupent en A et B.

4. **a.** Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que

$$|z| = \left|z + \sqrt{3} + \text{i}\right|.$$

   b. Montrer que les points A et B appartiennent à (E).

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On considère la similitude indirecte f d'écriture complexe

$$z' = \left(1 + \text{i}\sqrt{3}\right)\overline{z}$$

où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z.

Soient les points A et B d'affixes respectives $z_{\text{A}} = \sqrt{6} + \text{i}\sqrt{2}$ et $z_{\text{B}} = -\sqrt{2} + \text{i}\sqrt{6}$.

On note A$'$ et B$'$ les images respectives des points A et B par f.

Une figure fournie en ANNEXE du sujet, sera complétée et rendue avec la copie. Les différentes constructions seront faites à la règle et au compas, et les traits de construction devront apparaître clairement.

1. a. Écrire les affixes des points A et B sous forme exponentielle.
   b. Montrer que le triangle OAB est rectangle isocèle direct.
   c. En déduire la nature du triangle OA′B′.
   d. Montrer que l'affixe $z_{A'}$ de A′ vérifie l'égalité : $z_{A'} = 2z_A$.
   En déduire la construction de A′ et B′.
2. On note r la rotation de centre O et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$, et s la symétrie orthogonale d'axe $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\right)$. On pose $g = r \circ s$.
   a. Déterminer l'écriture complexe de la transformation g.
   b. Montrer que les points 0 et A sont invariants par g.
   c. En déduire la nature de la transformation g.
3. a. Montrer que l'on peut écrire $f = h \circ g$, où h est une homothétie de centre et de rapport à déterminer.
   b. Sur la figure placée en **ANNEXE**, un point C est placé. Faire la construction de l'image C′ de C par la transformation f.

EXERCICE 3 — 4 points

Commun à tous les candidats

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher : deux vertes et trois rouges.

Les questions 1. et 2. sont indépendantes

1. On extrait simultanément et au hasard deux boules de l'urne.
   On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes figurant dans le tirage.
   a. Vérifier que $P(X = 0) = \dfrac{3}{10}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   b. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.
   c. Calculer la probabilité de l'évènement suivant :
   A : « les deux boules tirées sont de même couleur ».
2. On effectue deux tirages successifs d'une boule en respectant la règle suivante :
   si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne ; si elle est verte, on ne la remet pas.
   a. En utilisant un arbre pondéré, calculer la probabilité des évènements suivants :

      B : « seule la première boule tirée est verte »,

      C : « une seule des deux boules tirées est verte ».
   b. Sachant que l'on a tiré exactement une boule verte, quelle est la probabilité que cette boule verte soit la première tirée ?

EXERCICE 4 — 4 points

Commun à tous les candidats

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$.

L'objectif de cet exercice est de déterminer la position relative d'objets de l'espace

$\mathscr{P}$ est le plan passant par A(3 ; 1 ; 2) et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\,(1\,;\,-4\,;\,1)$;

$\mathscr{D}$ est la droite passant par B(1 ; 4 ; 2) de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(1\ ;\ 1\ ;\ 3)$.

$\mathscr{S}$ est la sphère de centre $\Omega(1\ ;\ 9\ ;\ 0)$ passant par A.

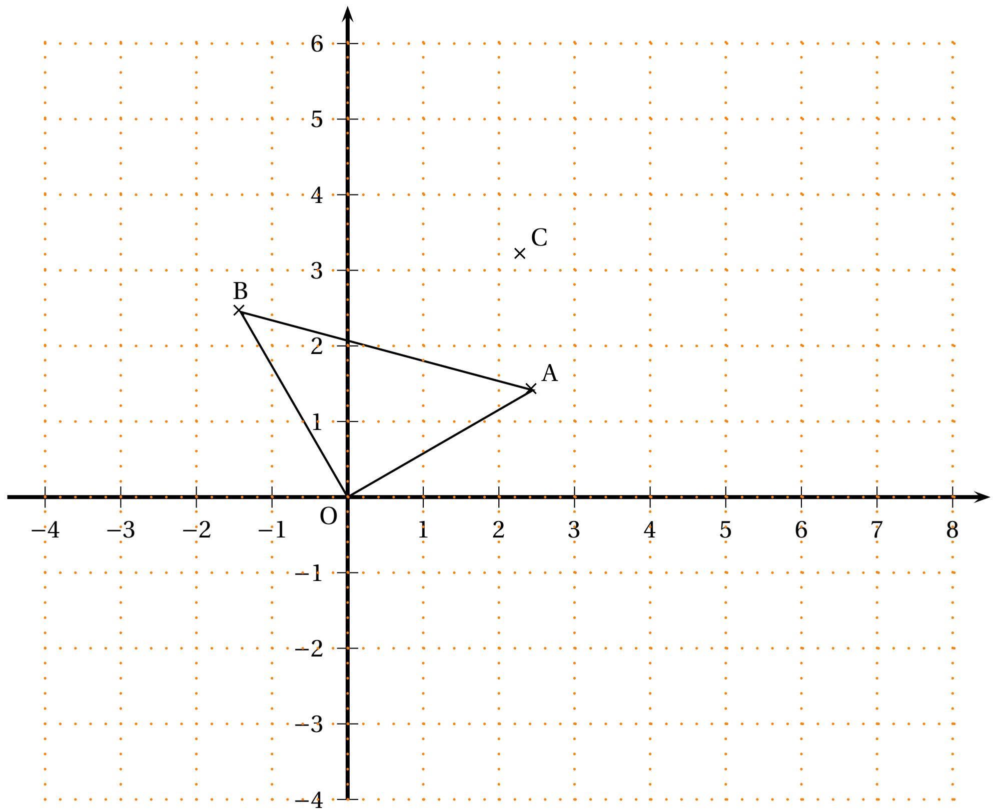
1. Intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite $\mathscr{D}$.
   a. Démontrer que le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne : $x-4y+z-1=0$.
   b. Montrer que la droite $\mathscr{D}$ est strictement parallèle au plan $\mathscr{P}$.
2. Intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la sphère $\mathscr{S}$.
   a. Calculer la distance d du point Ω au plan $\mathscr{P}$.
   b. Calculer le rayon de la sphère $\mathscr{S}$. En déduire l'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la sphère $\mathscr{S}$.
3. Intersection de la droite $\mathscr{D}$ et de la sphère $\mathscr{S}$.
   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$.
   b. Déterminer une équation cartésienne de la sphère $\mathscr{S}$.
   c. En déduire que la droite $\mathscr{D}$ coupe la sphère $\mathscr{S}$ en deux points M et N distincts dont on ne cherchera pas à déterminer les coordonnées.

ANNEXE

EXERCICE 2

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

À rendre avec la copie



Durée : 4 heures

∾ Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie ∾ mars 2011

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A : Restitution organisée de connaissances

On utilisera le résultat suivant : les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ où $a \in \mathbb{R}$ sont les fonctions g définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = K\mathrm{e}^{ax}$ où $K \in \mathbb{R}$.

Le but de cette partie est de déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) $y' = ay + b$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = -\dfrac{b}{a}$ est une solution de (E).
2. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer l'équivalence suivante : f est solution de (E) $\iff$ $f - u$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay$.
3. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

Partie B

Un cycliste roule sur une route descendante rectiligne et très longue. On note $v(t)$ sa vitesse à l'instant t, où t est exprimé en secondes et $v(t)$ en mètres par seconde.
On suppose de plus que la fonction v ainsi définie est dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
Un modèle simple permet de considérer que la fonction v est solution de l'équation différentielle :

$$10v'(t) + v(t) = 30.$$

Enfin, on suppose que, lorsque le cycliste s'élance, sa vitesse initiale est nulle, c'est-à-dire que $v(0) = 0$.

1. Démontrer que $v(t) = 30\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{10}}\right)$.
2. **a.** Déterminer le sens de variation de la fonction v sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

   b. Déterminer la limite de la fonction v en $+\infty$.
3. On considère, dans cette situation, que la vitesse du cycliste est stabilisée lorsque son accélération $v'(t)$ est inférieure à 0,1 m.s^{-2}. Déterminer, à la seconde près, la plus petite valeur de t à partir de laquelle la vitesse du cycliste est stabilisée.
4. La distance d parcourue par ce cycliste entre les instants t_1, et t_2 est donnée par $d = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t$.

   Calculer la distance parcourue par ce cycliste pendant les 35 premières secondes.

EXERCICE 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

Chaque année, deux villages A et B organisent un concours sportif. Les concurrents tirent au sort un moyen de transport puis doivent relier le village A au village B le plus rapidement possible en utilisant ce moyen de transport et un parcours adapté.

Pour le tirage, on utilise une urne contenant 4 jetons indiscernables au toucher. Sur un premier jeton figure la lettre V , sur le second la lettre R, sur le troisième la lettre P et sur le dernier la lettre L.

Un concurrent tire au hasard un jeton :
- s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre V, il effectuera le trajet à vélo,
- s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre R, Il effectuera le trajet en roller,
- s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre P, il effectuera le trajet à pied,
- s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre L, il choisira librement son mode de transport parmi les trois précédents.

On observe que lorsqu'un concurrent tire le jeton sur lequel figure la lettre L, il choisit le vélo dans 70 % des cas, il choisit le roller dans 20 % des cas el il décide de faire le parcours à pied dans 10 % des cas.

1. Construire un arbre pondéré correspondant à la situation.
   Pour les questions suivantes, on donnera les résultats arrondis au millième.
2. Calculer la probabilité qu'un concurrent effectue le trajet à vélo.
3. Sachant qu'un concurrent a effectué le trajet à vélo, quelle est la probabilité qu'il ait tiré le jeton sur lequel figure la lettre L ?
4. On admet que les résultats des différentes années sont indépendants les uns des autres.
   L'expérience des années précédentes permet de considérer que la probabilité, pour le vainqueur, d'avoir effectué le trajet à vélo est $\dfrac{2}{3}$.
   Calculer la probabilité qu'au cours des six prochaines années l'épreuve soit remportée au moins une fois par un concurrent « non cycliste ».

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Soit (u_n) la suite définie par $\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & u_n - \ln\left(u_n^2+1\right) \end{array}\right.$ pour tout entier naturel n.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \ln\left(x^2+1\right).$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~1]$.
   En déduire que si $x \in [0~;~1]$ alors $f(x) \in [0~;~1]$.

Partie B

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n \in [0~;~1]$.
2. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
3. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. Déterminer sa limite.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$.
On considère les points A$(-2~;~0~;~1)$, B$(1~;~2~;~-1)$ et C$(-2~;~2~;~2)$.

1. a. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}}$ puis les longueurs AB et AC.

b. En déduire une valeur approchée arrondie au degré près de l'angle $\widehat{\text{BAC}}$.

c. En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x - y + 2z + 2 = 0$.

3. Soient $\mathscr{P}_1$, et $\mathscr{P}_2$ les plans d'équations respectives $x + y - 3z + 3 = 0$ et $x - 2y + 6z = 0$.

Montrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants selon une droite $\mathscr{D}$ dont un système d'équations

paramétriques est $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & -2 \\ y & = & -1 + 3t \\ z & = & t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$.

4. Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ et le plan (ABC) sont sécants et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

5. Soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre $\Omega(1~;~-3~;~1)$ et de rayon $r = 3$.

a. Donner une équation cartésienne de la sphère $\mathscr{S}$.

Dans les deux questions suivantes, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

b. Étudier l'intersection de la sphère $\mathscr{S}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

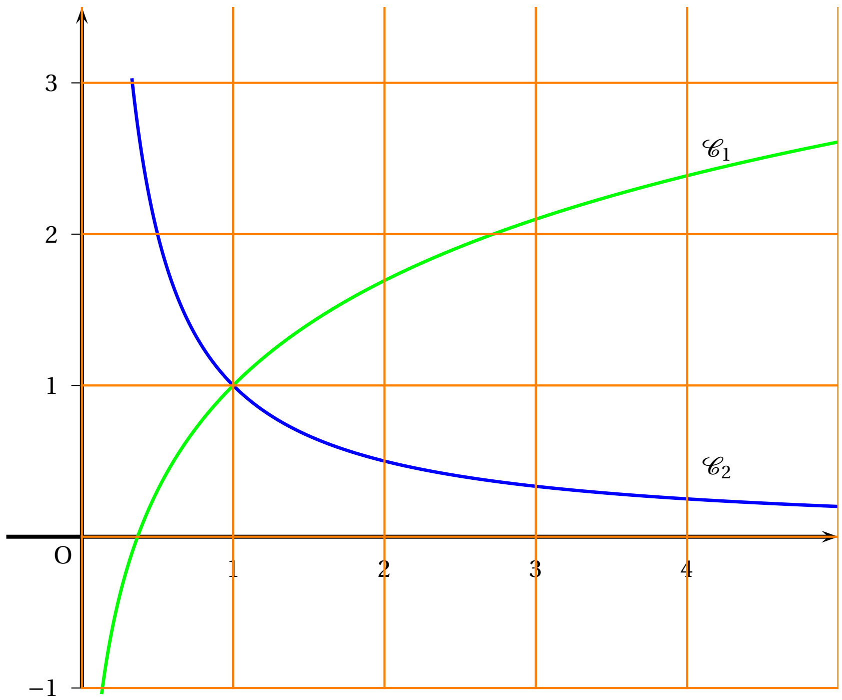
c. Démontrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère $\mathscr{S}$.

Baccalauréat S Pondichéry 13 avril 2011

Le sujet est composé de 3 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.

EXERCICE 1 **10 points**
Commun à tous les candidats

Partie I
Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormal, les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ représentatives de deux fonctions f_1 et f_2 définies sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.



On sait que :
- l'axe des ordonnées est asymptote aux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$
- l'axe des abscisses est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_2$
- la fonction f_2 est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$
- la fonction f_1 est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$
- la limite quand x tend vers $+\infty$ de $f_1(x)$ est $+\infty$.

Pour chacune des quatre questions de cette partie, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Chaque réponse juste rapporte 0,5 point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse n'est pas sanctionnée.

1. La limite quand x tend vers 0 de $f_2(x)$ est :

   • 0 • $+\infty$ • On ne peut pas conclure

2. La limite quand x tend vers $+\infty$ de $f_2(x)$ est :

   • 0 • 0, 2 • On ne peut pas conclure

3. En $+\infty$, $\mathscr{C}_1$ admet une asymptote oblique :

• Oui • Non • On ne peut pas conclure

4. Le tableau de signes de $f_2(x) - f_1(x)$ est :

•

x	0 $+\infty$
$f_2(x) - f_1(x)$	‖ $+$

•

x	0 $+\infty$
$f_2(x) - f_1(x)$	‖ $-$

•

x	0 $+\infty$
$f_2(x) - f_1(x)$	‖ $+ 0 -$

Partie II

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \ln(x) + 1 - \frac{1}{x}.$$

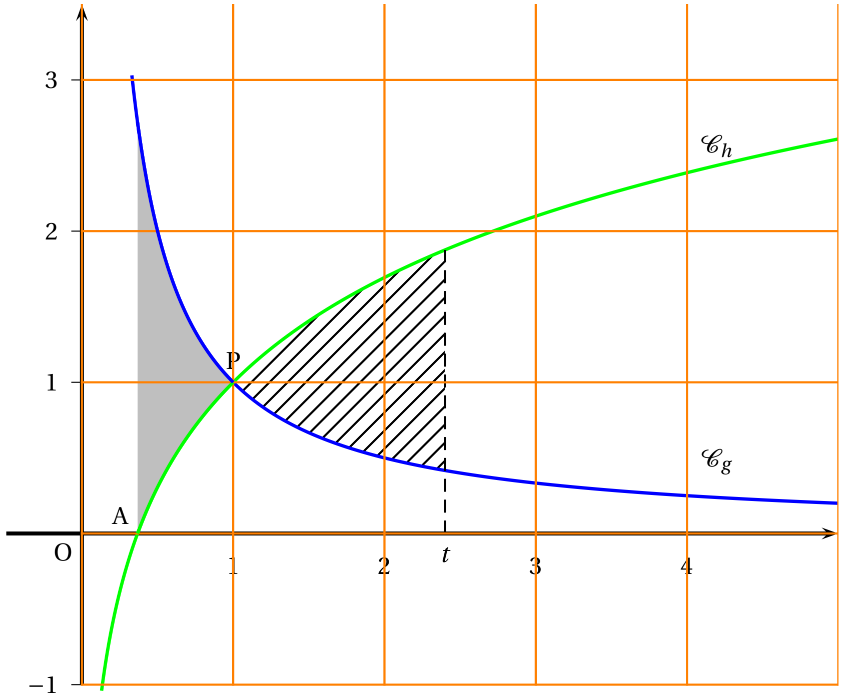
1. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
3. En déduire le signe de $f(x)$ lorsque x décrit l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
4. Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par $F(x) = x\ln x - \ln x$ est une primitive de la fonction f sur cet intervalle.
5. Démontrer que la fonction F est strictement croissante sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$.
6. Montrer que l'équation $F(x) = 1 - \dfrac{1}{\text{e}}$ admet une unique solution dans l'intervalle $]1~;~+\infty[$ qu'on note α.
7. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

Partie III

Soit g et h les fonctions définies sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad h(x) = \ln(x) + 1.$$

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormal, les courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ représentatives des fonctions g et h.

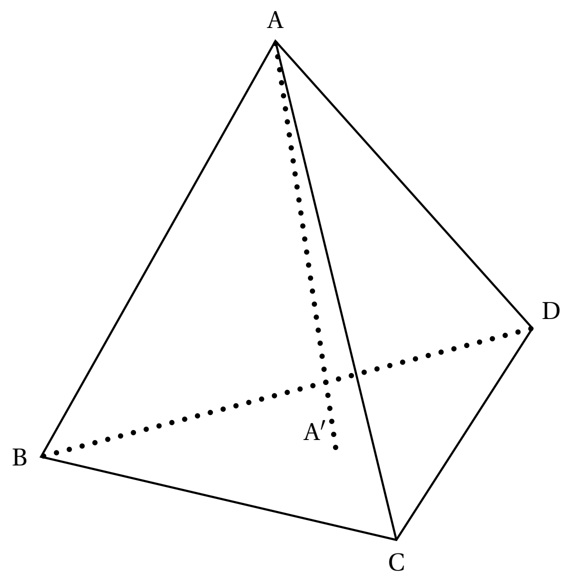


1. A est le point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_h$ et de l'axe des abscisses. Déterminer les coordonnées du point A.
2. P est le point d'intersection des courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$. Justifier que les coordonnées du point P sont (1 ; 1).
3. On note $\mathscr{A}$ l'aire du domaine délimité par les courbes $\mathscr{C}_g$, $\mathscr{C}_h$ et les droites d'équations respectives $x = \dfrac{1}{\text{e}}$ et $x = 1$ (domaine grisé sur le graphique).
   a. Exprimer l'aire $\mathscr{A}$ à l'aide de la fonction f définie dans la partie II.
   b. Montrer que $\mathscr{A} = 1 - \dfrac{1}{\text{e}}$.
4. Soit t un nombre réel de l'intervalle $]1~;~+\infty[$. On note $\mathscr{B}_t$ l'aire du domaine délimité par les droites d'équations respectives $x = 1$, $x = t$ et les courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ (domaine hachuré sur le graphique).
   On souhaite déterminer une valeur de t telle que $\mathscr{A} = \mathscr{B}_t$.
   a. Montrer que $\mathscr{B}_t = t\ln(t) - \ln(t)$.
   b. Conclure.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie 1

Dans cette partie, ABCD est un tétraèdre régulier, c'est-à-dire un solide dont les quatre faces sont des triangles équilatéraux.



A′ est le centre de gravité du triangle BCD.
Dans un tétraèdre, le segment joignant un sommet au centre de gravité de la face opposée est appelé médiane. Ainsi, le segment [AA′] est une médiane du tétraèdre ABCD.

1. On souhaite démontrer la propriété suivante :

($\mathscr{P}_1$) : *Dans un tétraèdre régulier, chaque médiane est orthogonale à la face opposée.*

a. Montrer que $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ et que $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. (On pourra utiliser le milieu I du segment [BD] et le milieu J du segment [BC]).

b. En déduire que la médiane (AA′) est orthogonale à la face BCD.
Un raisonnement analogue montre que les autres médianes du tétraèdre régulier ABCD sont également orthogonales à leur face opposée.

2. G est l'isobarycentre des points A, B, C et D.
On souhaite démontrer la propriété suivante :
($\mathscr{P}_2$) : *Les médianes d'un tétraèdre régulier sont concourantes en* G.
En utilisant l'associativité du barycentre, montrer que G appartient à la droite (AA′), puis conclure.

Partie II

On munit l'espace d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points P(1 ; 2 ; 3), Q(4 ; 2 ; −1) et R(−2 ; 3 ; 0).

1. Montrer que le tétraèdre OPQR n'est pas régulier.

2. Calculer les coordonnées de P′, centre de gravité du triangle OQR.

3. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (OQR) est : $3x + 2y + 16z = 0$.

4. La propriété ($\mathscr{P}_1$) de la partie 1 est-elle vraie dans un tétraèdre quelconque ?

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère, dans un repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de l'espace, la surface $\mathscr{S}$ d'équation :

$$z = (x - y)^2.$$

1. On note $\mathcal{E}_1$ l'intersection de $\mathcal{S}$ avec le plan $\mathcal{P}_1$ d'équation $z = 0$.
   Déterminer la nature de $\mathcal{E}_1$. On note $\mathcal{E}_2$ l'intersection de $\mathcal{S}$ avec le plan $\mathcal{P}_2$ d'équation $x = 1$.
   Déterminer la nature de $\mathcal{E}_2$.

Partie B

On considère, dans un repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de l'espace, la surface $\mathcal{S}'$ d'équation :

$$z = xy.$$

1. On note $\mathcal{E}_3$ l'intersection de $\mathcal{S}'$ avec le plan $\mathcal{P}_1$ d'équation $z = 0$.
   Déterminer la nature de $\mathcal{E}_3$
2. On note $\mathcal{E}_4$ l'intersection de $\mathcal{S}'$ avec le plan $\mathcal{P}_3$ d'équation $z = 1$.
   Déterminer la nature de $\mathcal{E}_4$.

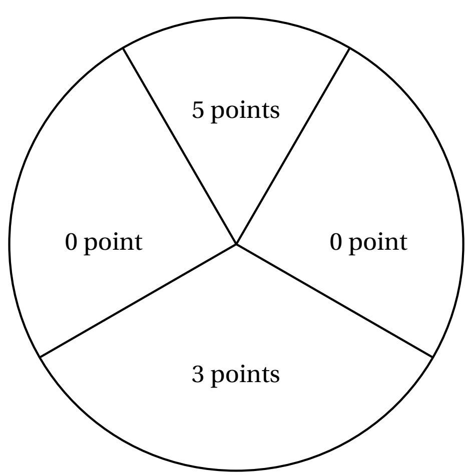
Partie C

On note $\mathcal{E}_5$ l'intersection de $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{S}'$.
Dans cette partie, on souhaite démontrer que le seul point appartenant à $\mathcal{E}_5$ dont les coordonnées sont des entiers naturels est le point O(0 ; 0 ; 0).
On suppose qu'il existe un point M appartenant à $\mathcal{E}_5$ et dont les coordonnées x, y et z sont des entiers naturels.

1. Montrer que si $x = 0$, alors le point M est le point O.
2. On suppose dorénavant que l'entier x n'est pas nul.
   a. Montrer que les entiers x, y et z vérifient $x^2 - 3xy + y^2 = 0$.
   En déduire qu'il existe alors des entiers naturels x' et y' premiers entre eux tels que $x'^2 - 3x'y' + y'^2 = 0$.
   b. Montrer que x' divise y'^2, puis que x' divise y'.
   c. Établir que y' vérifie la relation $1 - 3y' + y'^2 = 0$.
   d. Conclure.

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Un jeu consiste à lancer des fléchettes sur une cible. La cible est partagée en quatre secteurs, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



On suppose que les lancers sont indépendants et que le joueur touche la cible à tous les coups.

1. Le joueur lance une fléchette.
On note p_0 la probabilité d'obtenir 0 point.
On note p_3 la probabilité d'obtenir 3 points.
On note p_5 la probabilité d'obtenir 5 points.
On a donc $p_0 + p_3 + p_5 = 1$. Sachant que $p_5 = \frac{1}{2}p_3$ et que $p_5 = \frac{1}{3}p_0$ déterminer les valeurs de p_0, p_3 et p_5.

2. Une partie de ce jeu consiste à lancer trois fléchettes au maximum. Le joueur gagne la partie s'il obtient un total (pour les 3 lancers) supérieur ou égal à 8 points. Si au bout de 2 lancers, il a un total supérieur ou égal à 8 points, il ne lance pas la troisième fléchette.
On note G_2 l'évènement : « le joueur gagne la partie en 2 lancers ».
On note G_3 l'évènement : « le joueur gagne la partie en 3 lancers ».
On note P l'évènement : « le joueur perd la partie ».
On note $p(A)$ la probabilité d'un évènement A.

a. Montrer, en utilisant un arbre pondéré, que $p(G_2) = \frac{5}{36}$.
On admettra dans la suite que $p(G_3) = \frac{7}{36}$

b. En déduire $p(P)$.

3. Un joueur joue six parties avec les règles données à la question 2.
Quelle est la probabilité qu'il gagne au moins une partie ?

4. Pour une partie, la mise est fixée à 2 €.
Si le joueur gagne en deux lancers, il reçoit 5 €. S'il gagne en trois lancers, il reçoit 3 €. S'il perd, il ne reçoit rien.
On note X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur pour une partie. Les valeurs possibles pour X sont donc : -2, 1 et 3.

a. Donner la loi de probabilité de X.

b. Déterminer l'espérance mathématique de X. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Baccalauréat S Amérique du Nord 27 mai 2011

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On considère les points A et B d'affixes respectives : $a = i$ et $b = 1 + i$.
On note : r_A la rotation de centre A, d'angle $\frac{\pi}{2}$, r_B la rotation de centre B, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r_O la rotation de centre O, d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Partie A

On considère le point C d'affixe $c = 3i$. On appelle D l'image de C par r_A, G l'image de D par r_B et H l'image de C par r_O.
On note d, g et h les affixes respectives des points D, G et H.

1. Démontrer que $d = -2 + i$.
2. Déterminer g et h.
3. Démontrer que le quadrilatère CDGH est un rectangle.

Partie B

On considère un point M, distinct de O et de A, d'affixe m. On appelle N l'image de M par r_A, P l'image de N par r_B et Q l'image de M par r_O.
On note n, p et q les affixes respectives des points N, P et Q.

1. Montrer que $n = im + 1 + i$. On admettra que $p = -m + 1 + i$ et $q = -im$.
2. Montrer que le quadrilatère $MNPQ$ est un parallélogramme.
3. **a.** Montrer l'égalité : $\dfrac{m-n}{p-n} = i + \dfrac{1}{m}$.

   b. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Déterminer l'ensemble (Γ) des points M tels que le quadrilatère $MNPQ$ soit un rectangle.

EXERCICE 2 **4 points**

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Une salle informatique d'un établissement scolaire est équipée de 25 ordinateurs dont 3 sont défectueux. Tous les ordinateurs ont la même probabilité d'être choisis.
On choisit au hasard deux ordinateurs de cette salle.
Quelle est la probabilité que ces deux ordinateurs soient défectueux ?

Partie B

La durée de vie d'un ordinateur (c'est-à-dire la durée de fonctionnement avant la première panne), est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.
Ainsi, pour tout réel t positif, la probabilité qu'un ordinateur ait une durée de vie inférieure à t années, notée $p(X \leqslant t)$, est donnée par : $p(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$.

1. Déterminer λ sachant que $p(X > 5) = 0,4$.

2. Dans cette question, on prendra $\lambda = 0,18$.

Sachant qu'un ordinateur n'a pas eu de panne au cours des 3 premières années, quelle est, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 5 ans ?

3. Dans cette question, on admet que la durée de vie d'un ordinateur est indépendante de celle des autres et que $p(X > 5) = 0,4$.

a. On considère un lot de 10 ordinateurs.

Quelle est la probabilité que, dans ce lot, l'un au moins des ordinateurs ait une durée de vie supérieure à 5 ans ? On donnera une valeur arrondie au millième de cette probabilité.

b. Quel nombre minimal d'ordinateurs doit-on choisir pour que la probabilité de l'évènement « l'un au moins d'entre eux a une durée de vie supérieure à 5 ans » soit supérieure à 0,999 ?

EXERCICE 3 **5 points**

Partie A : Restitution organisée de connaissances

On considère trois points A, B et C de l'espace et trois réels a, b et c de somme non nulle.

Démontrer que, pour tout réel k strictement positif, l'ensemble des points M de l'espace tels que $\|a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}\| = k$ est une sphère dont le centre est le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs a, b et c.

Partie B

On considère le cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1 représenté ci-dessous.

Il n'est pas demandé de rendre le graphique avec la copie.

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{A} ; \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

1. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(1 ; 0 ; 1)$ est un vecteur normal au plan (BCE).

2. Déterminer une équation du plan (BCE).

3. On note (Δ) la droite perpendiculaire en E au plan (BCE).

Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ).

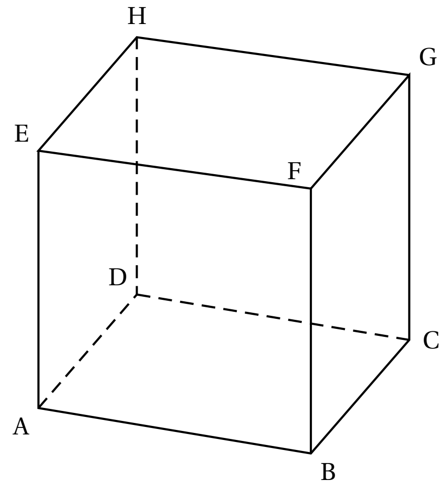
4. Démontrer que la droite (Δ) est sécante au plan (ABC) en un point R, symétrique de B par rapport à A.

5. **a.** Démontrer que le point D est le barycentre des points R, B et C affectés des coefficients respectifs 1, -1 et 2.

b. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (S) des points M de l'espace tels que $\|\overrightarrow{MR} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 2\sqrt{2}$.

c. Démontrer que les points B, E et G appartiennent à l'ensemble (S).

d. Démontrer que l'intersection du plan (BCE) et de l'ensemble (S) est un cercle dont on précisera le rayon.



EXERCICE 3 **5 points**
Enseignement de spécialité

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

Partie B

On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat :
« Si p est un nombre premier et q un entier naturel premier avec p, alors $q^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ ».
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1.$$

1. Calculer les six premiers termes de la suite.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est pair.
3. Montrer que, pour tout entier naturel n pair non nul, u_n est divisible par 4.
   On note (E) l'ensemble des nombres premiers qui divisent au moins un terme de la suite (u_n).
4. Les entiers 2, 3, 5 et 7 appartiennent-ils à l'ensemble (E) ?
5. Soit p un nombre premier strictement supérieur à 3.
   a. Montrer que : $6 \times 2^{p-2} \equiv 3 \pmod{p}$ et $6 \times 3^{p-2} \equiv 2 \pmod{p}$.
   b. En déduire que $6u_{p-2} \equiv 0 \pmod{p}$.
   c. Le nombre p appartient-il à l'ensemble (E) ?

EXERCICE 4 **6 points**

Partie A

On considère la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = \mathrm{e}^x - x - 1.$$

1. Étudier les variations de la fonction g.
2. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

3. En déduire que pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$, $\mathrm{e}^x - x > 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,1]$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - x}.$$

La courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal est donnée en annexe.
Cette annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.
On admet que f est strictement croissante sur $[0\,;\,1]$.

1. Montrer que pour tout x de $[0\,;\,1]$, $f(x) \in [0\ ;\ 1]$.

2. Soit (D) la droite d'équation $y = x$.

  a. Montrer que pour tout x de $[0\,;\,1]$, $f(x) - x = \dfrac{(1-x)g(x)}{\mathrm{e}^x - x}$.

  b. Étudier la position relative de la droite (D) et de la courbe $(\mathscr{C})$ sur $[0\,;\,1]$.

3. **a.** Déterminer une primitive de f sur $[0\,;\,1]$.

  b. Calculer l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe $(\mathscr{C})$, la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Partie C

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} & = & f(u_n), \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{array}\right.$$

1. Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite en laissant apparents les traits de construction.

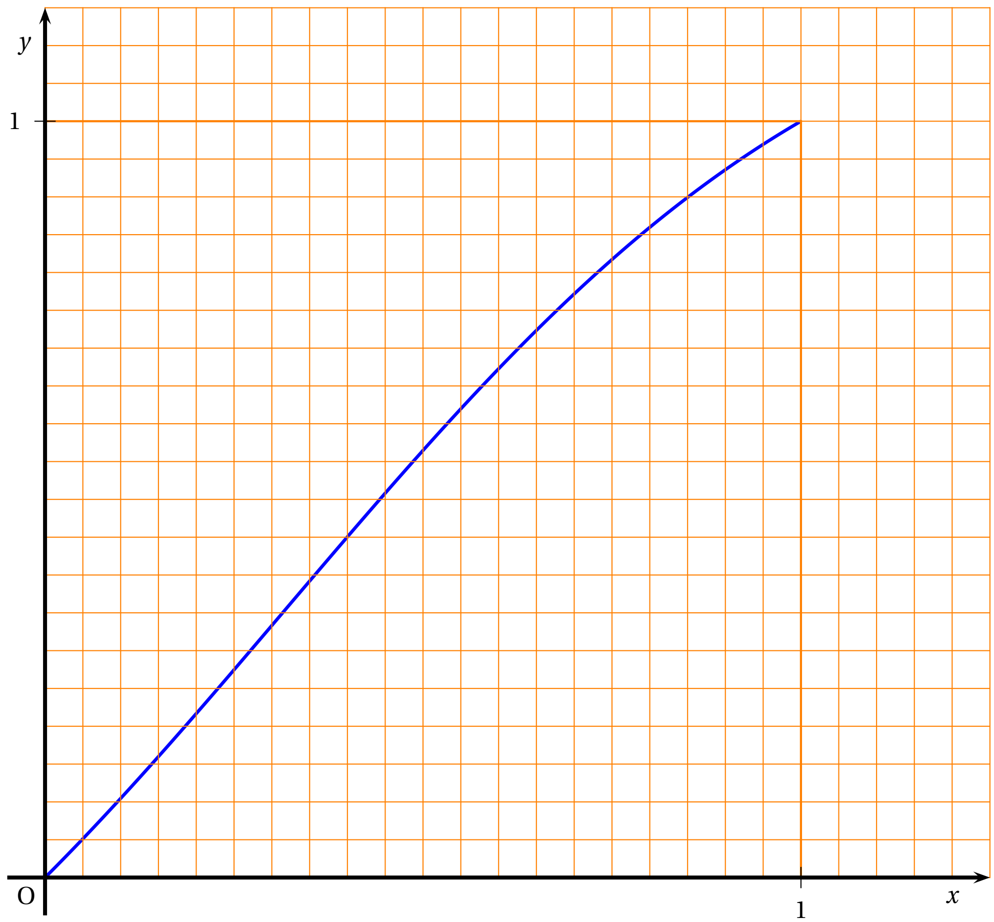
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

ANNEXE

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve

EXERCICE 4



Baccalauréat S Liban 31 mai 2011

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on donne les trois points :

$$\text{A}(1~;~2~;~-1), \text{B}(-3~;~-2~;~3) \text{ et } \text{C}(0~;~-2~;~-3)$$

1. **a.** Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

   b. Démontrer que le vecteur $\vec{n}\,(2~;~-1~;~1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

2. Soit (P) le plan dont une équation cartésienne est $x+y-z+2=0$.
   Démontrer que les plans (ABC) et (P) sont perpendiculaires.

3. On appelle G le barycentre des points pondérés (A, 1), (B, -1) et (C, 2).

   a. Démontrer que le point G a pour coordonnées $(2~;~0~;~-5)$.

   b. Démontrer que la droite (CG) est orthogonale au plan (P).

   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CG).

   d. Déterminer les coordonnées du point H, intersection du plan (P) avec la droite (CG).

4. Démontrer que l'ensemble (S) des points M de l'espace tels que
   $\left\|\overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{B}} + 2\overrightarrow{M\text{C}}\right\| = 12$ est une sphère dont on déterminera les éléments caractéristiques.

5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'intersection du plan (P) et de la sphère (S).

EXERCICE 2 **3 points**

Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule des réponses est exacte.

Le candidat portera sur sa copie, sans justification, le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Il sera attribué $0,5$ *point si la réponse est exacte,* 0 *sinon.*

1. Un magasin de matériel informatique vend deux modèles d'ordinateur au même prix et de marques M_1 et M_2. Les deux ordinateurs ont les mêmes caractéristiques et sont proposés en deux couleurs : noir et blanc.
   D'après une étude sur les ventes de ces deux modèles, 70 % des acheteurs ont choisi l'ordinateur M_1 et, parmi eux, 60 % ont préféré la couleur noire. Par ailleurs, 20 % des clients ayant acheté un ordinateur M_2 l'ont choisi de couleur blanche.
   On utilise la liste des clients ayant acheté l'un ou l'autre des ordinateurs précédemment cités et on choisit un client au hasard.

   a. La probabilité qu'un client choisi au hasard ait acheté un ordinateur M_2 de couleur noire est :

   Réponse A : $\dfrac{3}{5}$ **Réponse B :** $\dfrac{4}{5}$ **Réponse C :** $\dfrac{3}{50}$ **Réponse D :** $\dfrac{6}{25}$

b. La probabilité qu'un client choisi au hasard ait acheté un ordinateur de couleur noire est :

Réponse A : $\frac{21}{50}$ **Réponse B :** $\frac{33}{50}$ **Réponse C :** $\frac{3}{5}$ **Réponse D :** $\frac{12}{25}$

c. Le client a choisi un ordinateur de couleur noire. La probabilité qu'il soit de marque M_2 est :

Réponse A : $\frac{4}{11}$ **Réponse B :** $\frac{6}{25}$ **Réponse C :** $\frac{7}{11}$ **Réponse D :** $\frac{33}{50}$

2. Une urne contient 4 boules jaunes, 2 boules rouges et 3 boules bleues.
Les boules sont indiscernables au toucher.
L'expérience consiste à tirer au hasard et simultanément 3 boules de l'urne.

a. La probabilité d'obtenir trois boules de même couleur est :

Réponse A : $\frac{11}{81}$ **Réponse B :** $\frac{2}{7}$ **Réponse C :** $\frac{5}{84}$ **Réponse D :** $\frac{4}{63}$

b. La probabilité d'obtenir trois boules de trois couleurs différentes est :

Réponse A : $\frac{2}{7}$ **Réponse B :** $\frac{1}{7}$ **Réponse C :** $\frac{1}{21}$ **Réponse D :** $\frac{79}{84}$

c. On répète plusieurs fois l'expérience, de manière indépendante, en remettant à chaque fois les trois boules dans l'urne.
Le nombre minimal d'expériences à réaliser pour que la probabilité de l'évènement « obtenir au moins une fois trois boules jaunes » soit supérieure ou égale à 0,99 est :

Réponse A : 76 **Réponse B :** 71 **Réponse C :** 95 **Réponse D :** 94

EXERCICE 3 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement obligatoire

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Prérequis : On suppose connu le résultat suivant :

Quels que soient les nombres complexes non nuls z et z', $\arg\left(z \times z'\right) = \arg(z)+\arg\left(z'\right)$ à 2π près.
Démontrer que, quels que soient les nombres complexes non nuls z et z', on a : $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg\left(z'\right)$ à 2π près.

Partie B

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = 1 - \text{i} \quad \text{et} \quad z_{\text{B}} = 2 + \sqrt{3} + \text{i}.$$

1. Déterminer le module et un argument de z_{A}.

2. **a.** Écrire $\frac{z_{\text{B}}}{z_{\text{A}}}$ sous forme algébrique.

b. Montrer que $\dfrac{z_B}{z_A} = \left(1+\sqrt{3}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

c. En déduire la forme exponentielle de z_B.

3. On note B_1 l'image du point B par la rotation r de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{6}$.

a. Déterminer l'affixe du point B_1.

b. En déduire que le point B_1 est le symétrique du point B par rapport à l'axe $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\right)$.

Soit M un point du plan. On note M_1 l'image du point M par la rotation r et M' le symétrique du point M_1 par rapport à l'axe $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\right)$.

On désigne par (E) l'ensemble des points M du plan tels que $M' = M$.

a. Montrer que les points O et B appartiennent à l'ensemble (E).

b. Soit M un point distinct du point O.
Son affixe z est égale à $\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où ρ est un réel strictement positif et θ un nombre réel.
Montrer que l'affixe z' du point M' est égale à $\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)}$ puis déterminer l'ensemble des valeurs du réel θ telles que M appartienne à l'ensemble (E).

c. Déterminer l'ensemble (E).

EXERCICE 3 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : Restitution organisée de connaissances

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct.
Prérequis : L'écriture complexe d'une similitude directe est de la forme $z' = az + b$ où a et b sont deux nombres complexes tels que $a \neq 0$.

Démontrer que si A, B, A′ et B′ sont quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$, alors il existe une unique similitude directe transformant A en A′ et B en B′.

Partie B

On considère le triangle rectangle isocèle ABC tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ modulo 2π.
On note D le symétrique de A par rapport au point C.
On désigne par s la similitude directe transformant D en C et C en B.

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude s.

2. On appelle Ω le centre de la similitude s.

a. En utilisant la relation $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{\Omega C} - \overrightarrow{\Omega D}$, démontrer que $DC^2 = \Omega D^2$.

b. En déduire la nature du triangle ΩDC.

3. On pose $\sigma = s \circ s$.

a. Quelle est la nature de la transformation σ ? Préciser ses éléments caractéristiques.

b. Déterminer l'image du point D par la transformation σ.

4. Démontrer que le quadrilatère ADΩB est un rectangle.

5. Dans cette question, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(A\,;\,\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, choisi de manière à ce que les points A, B, C et D aient comme affixes respectives 0, 1, i et 2i.

a. Démontrer que l'écriture complexe de la similitude s est :
$z' = (1+\mathrm{i})z + 2 - \mathrm{i}$ où z et z' désignent respectivement les affixes d'un point M et de son image M' par s.

b. On note x et x', y et y' les parties réelles et les parties imaginaires de z et z'.
Démontrer que $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x - y + 2 \\ y' & = & x + y - 1 \end{array}\right.$

c. Soit J le point d'affixe $1 + 3\mathrm{i}$.
Existe-t-il des points M du plan dont les coordonnées sont des entiers relatifs et tels que
$\overrightarrow{\mathrm{A}M'} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AJ}} = 0$, M' désignant l'image du point M par s ?

EXERCICE 4 **7 points**
Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x + \mathrm{e}^{-x}.$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

Partie A

1. Étudier les variations de la fonction f sur $[0~;~+\infty[$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Montrer que $(\mathscr{C})$ admet une asymptote oblique dont on précisera une équation.

Partie B

On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ à termes positifs définie par :

$u_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = f(u_n) = u_n + \mathrm{e}^{-u_n}$.

1. Démontrer que, pour tout réel x positif, $\ln(1+x) \leqslant x$.
On pourra étudier la fonction g définie sur $[0~;~+\infty[$ par $g(x) = x - \ln(1+x)$.
2. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(n+1) \leqslant \ln(n) + \dfrac{1}{n}$.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $f[\ln(n)] = \ln(n) + \dfrac{1}{n}$.
4. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(n) \leqslant u_n$.
5. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$.

Dans la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $u_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n-1}$.

6. **a.** Démontrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a :
$\dfrac{1}{k} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.
b. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :
$u_n \leqslant 1 + \ln(n-1)$.
7. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a montré que
$\ln(n) \leqslant u_n \leqslant 1 + \ln(n-1)$.
Démontrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{\ln(n)}\right)_{n \geqslant 2}$ converge vers 1.

Baccalauréat S Polynésie 10 juin 2011

Exercice 1 — 5 points

Commun à tous les candidats.

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. Soient A le point d'affixe $2-5\text{i}$ et B le point d'affixe $7-3\text{i}$.
   Proposition 1 : Le triangle OAB est rectangle isocèle.
2. Soit (Δ) l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z-\text{i}| = |z+2\text{i}|$.
   Proposition 2 : (Δ) est une droite parallèle à l'axe des réels.
3. Soit $z = 3+\text{i}\sqrt{3}$.
   Proposition 3 : Pour tout entier naturel n non nul, z^{3n} est imaginaire pur.
4. Soit z un nombre complexe non nul.
   Proposition 4 : Si $\dfrac{\pi}{2}$ est un argument de z alors $|\text{i}+z| = 1+|z|$.
5. Soit z un nombre complexe non nul.
   Proposition 5 : Si le module de z est égal à 1 alors $z^2+\dfrac{1}{z^2}$ est un nombre réel.

Exercice 2 — 5 points

Enseignement obligatoire

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives.
On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de $0,1$;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,8$;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,6$.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- G_n l'évènement « le joueur gagne la n-ième partie » ;
- p_n la probabilité de l'évènement G_n.

On a donc $p_1 = 0,1$.

1. Montrer que $p_2 = 0,62$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
2. Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.
3. Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières parties.
4. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = \dfrac{1}{5}p_n+\dfrac{3}{5}$.
5. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul,
   $p_n = \dfrac{3}{4}-\dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$.
6. Déterminer la limite de la suite $\left(p_n\right)$ quand n tend vers $+\infty$.
7. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n a-t-on : $\dfrac{3}{4}-p_n < 10^{-7}$?

Exercice 2 5 points

Enseignement de spécialité

On rappelle la propriété, connue sous le nom de petit théorème de Fermat :
Si p est un nombre premier et a est un entier naturel non divisible par p, alors $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 10u_n + 21.$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $3u_n = 10^{n+1} - 7$.

b. En déduire, pour tout entier naturel n, l' écriture décimale de u_n.

3. Montrer que u_2 est un nombre premier.

On se propose maintenant d'étudier la divisibilité des termes de la suite (u_n) par certains nombres premiers.

4. Démontrer que, pour tout entier naturel n, u_n n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5.

5. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $3u_n \equiv 4 - (-1)^n \pmod{11}$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, u_n n'est pas divisible par 11.

6. **a.** Démontrer l'égalité : $10^{16} \equiv 1 \pmod{17}$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel k, u_{16k+8} est divisible par 17.

Exercice 3 5 points

Commun à tous les candidats

Partie A : Restitution organisée de connaissances

On supposera connus les résultats suivants :

- Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$.
Pour tous réels α et β, $\displaystyle\int_a^b [\alpha u(x) + \beta v(x)]\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + \beta\int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$.
- Si u désigne une fonction continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$ et U une primitive de u sur $[a\,;\,b]$
alors $\displaystyle\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x = [U(x)]_a^b = U(b) - U(a)$.

En utilisant la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions dérivables, à dérivées continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$, démontrer la formule d'intégration par parties.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 \ln x.$$

La courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ est donnée en annexe.

1. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Étudier les variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

2. *Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Démontrer qu'il existe une tangente unique à la courbe $(\mathcal{C})$ passant par O. Préciser une équation de cette tangente.

3. On considère le solide obtenu par rotation autour de l'axe (Ox) de la région plane délimitée par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = \frac{1}{\text{e}}$ et $x = 1$.

On note V une mesure, exprimée en unités de volume, du volume de ce solide et on admet que :

$$V = \int_{\frac{1}{\text{e}}}^{1} \pi [f(x)]^2 \,\text{d}x.$$

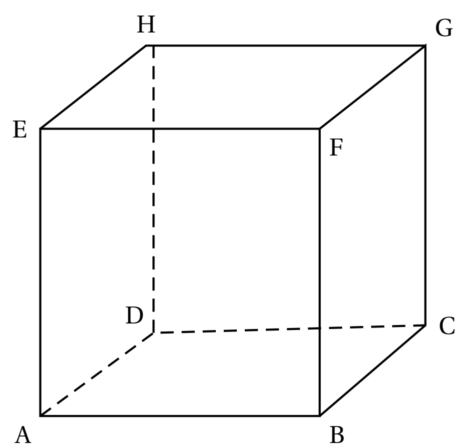
a. Montrer qu'une primitive de la fonction $x \longmapsto x^4 \ln x$ sur $]0\,;\,+\infty[$ est la fonction $x \longmapsto \frac{x^5}{25}(5\ln x - 1)$.

b. En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, que : $V = \frac{\pi}{125}\left(2 - \frac{37}{\text{e}^5}\right)$.

Exercice 4 5 points

Commun à tous les candidats.

On considère le cube ABCDEFGH de côté 1 représenté ci-dessous.



Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{D}\,;\,\overrightarrow{\text{DA}}, \overrightarrow{\text{DC}}, \overrightarrow{\text{DH}}\right)$.
On note K le barycentre des points pondérés (D, 1) et (F, 2).

Partie A

1. Montrer que le point K a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{2}{3}\,;\,\frac{2}{3}\right)$.

2. Montrer que les droites (EK) et (DF) sont orthogonales.

3. Calculer la distance EK.

Partie B

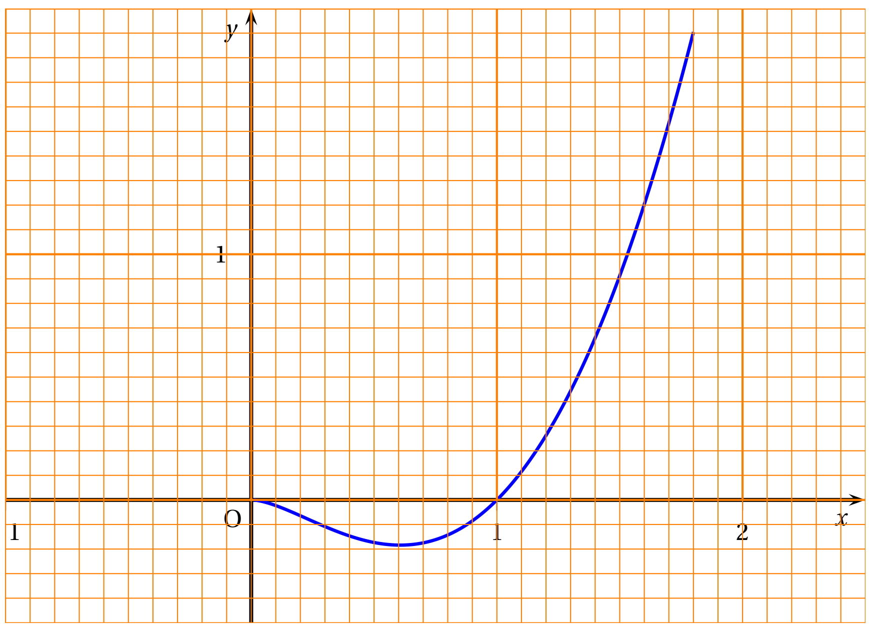
Soit M un point du segment [HG].
On note $m = \text{H}M$ (m est donc un réel appartenant à $[0\,;\,1]$).

1. Montrer que, pour tout réel m appartenant à l'intervalle $[0 ; 1]$, le volume du tétraèdre EMFD, en unités de volume, est égal à $\frac{1}{6}$.
2. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (MFD) est $(-1+m)x+y-mz=0$.
3. On note d_m la distance du point E au plan (MFD).
   a. Montrer que, pour tout réel m appartenant à l'intervalle $[0 ; 1]$, $d_m = \dfrac{1}{\sqrt{2m^2-2m+2}}$.
   b. Déterminer la position de M sur le segment [HG] pour laquelle la distance d_m est maximale.
   c. En déduire que lorsque la distance d_m est maximale, le point K est le projeté orthogonal de E sur le plan (MFD).

ANNEXE

Exercice 3

Cette page ne sera pas à rendre avec la copie



Durée : 4 heures

Baccalauréat S Antilles-Guyane 20 juin 2011

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra 2 cm pour unité graphique. On appelle J le point d'affixe i.

1. On considère les points A, B, C, H d'affixes respectives $a = -3 - \text{i}$, $b = -2 + 4\text{i}$, $c = 3 - \text{i}$ et $h = -2$.

   Placer ces points sur une figure, qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

2. Montrer que J est le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC. Préciser le rayon du cercle $\mathscr{C}$.

3. Calculer, sous forme algébrique, le nombre complexe $\dfrac{b-c}{h-a}$. En déduire ques les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

Dans la suite de l'exercice, on admet que H est l'orthocentre du triangle ABC, c'est-à-dire le point d'intersection des hauteurs du triangle ABC.

4. On note G le centre de gravité du triangle ABC. Déterminer l'affixe g du point G. Placer G sur la figure.

5. Montrer que le centre de gravité G, le centre du cercle cironcscrit J et l'orthocentre H du triangle ABC sont alignés. Le vérifier sur la figure.

6. On note A' le milieu de $[BC]$ et K celui de $[AH]$. Le point A' a pour affixe $a' = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\text{i}$.

   a. Déterminer l'affixe du point K.

   b. Démontrer que le quadrilatère $KHA'J$ est un parallélogramme.

EXERCICE 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

1. Soit f la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x\text{e}^x - 1.$$

   a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$ et étudier le sens de variation de f.

   b. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

   c. Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

2. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction exponentielle et Γ celle de la fonction logarithme népérien dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

   Les courbes $\mathscr{C}$ et Γ sont donnée en **annexe 1**.

   Soit x un nombre réel strictement positif. On note M le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x et N le point de Γ d'abscisse x.

   On rappelle que pour tout réel x strictement positif, $\text{e}^x > \ln(x)$.

a. Montrer que la longueur MN est minimale lorsque $x = \alpha$. Donner une valeur approchée de cette longueur minimale à 10^{-2} près.

b. En utilisant la question **1.**, montrer que $\text{e}^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha}$. En déduire que la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse α et la tangente à Γ au point d'abscisse α sont parallèles.

3. **a.** Soit h la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par $h(x) = x\ln(x) - x$. Montrer que la fonction h est une primitive de la fonction logarithme népérien sur $]0~;~+\infty[$.

b. Calculer la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près, de l'aire (exprimée en unités d'aire) de la surface hachurée sur la figure jointe en **annexe 1**.

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est questionnaire à choix multiples constitué de quatre questions indépendantes. Pour chacune d'elles, une seule des quatre propositions est exacte.

Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

1. Dans un stand de tir, la probabilité pour un tireur d'atteindre la cible est de 0,3. On effectue n tirs supposés indépendants. On désigne par p_n la probabilité d'atteindre la cible au moins une fois sur ces n tirs.

La valeur minimale de n pour que p_n soit supérieure ou égale à 0,9 est :

a) 6 **b)** 7 **c)** 10 **d)** 12

2. On observe la durée de fonctionnement, exprimée en heures, d'un moteur Diesel jusqu'à ce que survienne la première panne. Cette durée de fonctionnement est modélisée par une variable aléatoire X définie sur $[0~;~+\infty[$ et suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0002$. Ainsi, la probabilité que le moteur tombe en panne avant l'instant t est $p(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda \text{e}^{-\lambda x}\text{d}x$.

La probabilité que le moteur fonctionne sans panne pendant plus de 10 000 heures est, au millième près :

a) 0,271 **b)** 0,135 **c)** 0,865 **d)** 0,729

3. Un joueur dispose d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. À chaque lancer, il gagne s'il obtient 2, 3, 4, 5 ou 6 ; il perd s'il obtient 1.

Une partie est constituée de 5 lancers du dé successifs et indépendants.

La probabilité pour que le joueur perde 3 fois au cours d'une partie est :

a) $\dfrac{125}{3\,888}$ **b)** $\dfrac{625}{648}$ **c)** $\dfrac{25}{7\,776}$ **d)** $\dfrac{3}{5}$

4. Soient A et B deux évènements indépendants d'une même univers Ω tels que $p(A) = 0{,}3$ et $p(A \cup B) = 0{,}65$. La probabilité de l'évènement B est :

a) 0,5 **b)** 0,35 **c)** 0,46 **d)** 0,7

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

1. On considère l'équation (E) : $11x - 7y = 5$, où x et y sont des entiers relatifs.

a. Justifier, en énonçant un théorème, qu'il existe un couple d'entiers relatifs $(u~;~v)$ tels que $11u - 7v = 1$. Trouver un tel couple.

b. En déduire une solution particulière de l'équation (E).

c. Résoudre l'équation (E).

d. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère la droite D d'équation cartésienne $11x-7y-5=0$. On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des points $M(x\;;\;y)$ du plan tels que $0 \leqslant x \leqslant 50$ et $0 \leqslant y \leqslant 50$.

Déterminer le nombre de points de la droite D appartenant à l'ensemble $\mathscr{C}$ et dont les coordonnées sont des nombres entiers.

2. On considère l'équation (F) : $11x^2-7y^2=5$, où x et y sont des entiers relatifs.

a. Démontrer que si le couple $(x\;;\;y)$ est solution de (F), alors $x^2 \equiv 2y^2 \pmod 5$.

b. Soient x et y des entiers relatifs. Recopier et compléter les deux tableaux suivants :

Modulo 5, x est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, x^2 est congru à					

Modulo 5, y est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, $2y^2$ est congru à					

Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de x^2 et de $2y^2$ par 5 ?

c. En déduire que si le couple $(x\;;\;y)$ est solution de (F), alors x et y sont des multiples de 5.

3. Démontrer que si x et y sont des multiples de 5, alors le couple $(x\;;\;y)$ n'est pas solution de (F). Que peut-on en déduire pour l'équation (F) ?

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère la droite D passant par le point A de coordonnées $(3\;;\;-4\;;\;1)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}\,(1\;;\;-3\;;\;1)$.
On considère la droite D' dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -1-t \\ y &=& 2+t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z &=& 1-t \end{array}\right.$$

On admet qu'il existe une unique droite Δ perpendiculaire aux droites D et D'. On se propose de déterminer une représentation paramétrique de cette droite Δ et de calculer la distance entre les droites D et D', distance qui sera définie à la question **5.**
On note H le point d'intersection des droites D et Δ, H' le point d'intersection des droites D' et Δ. On appelle P le plan contenant la droite D et la droite Δ. On admet que le plan P et la droite D' sont sécants en H'. Une figure est donnée en **annexe 2**.

1. On considère le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(1\;;\;0\;;\;-1)$. Démontrer que $\vec{w}$ est une vecteur directeur de la droite Δ.

2. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(3\;;\;2\;;\;3)$.

a. Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan P.

b. Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est $3x+2y+3z-4=0$.

3. a. Démontrer que le point H' a pour coordonnées $(-1\;;\;2\;;\;1)$.

b. En déduire une représentation paramétrique de la droite Δ.

4. a. Déterminer les coordonnées du point H.

b. Calculer la longueur HH'.

5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

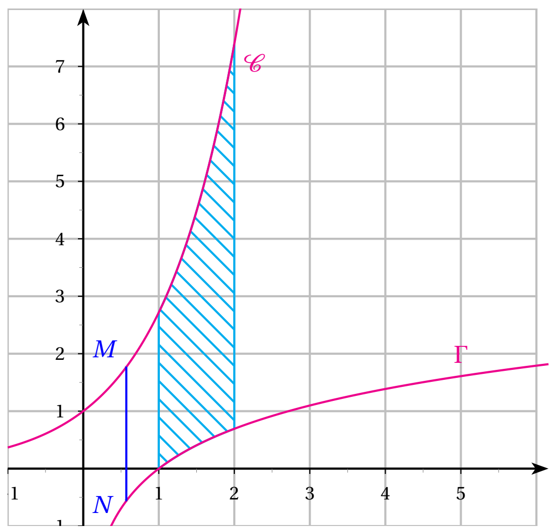
L'objectif de cette question est de montrer que, pour tout point M appartenant à D et tout point M' appartenant à D', $MM' \geqslant HH'$.

a. Montrer que $\overrightarrow{MM'}$ peut s'écrire comme la somme de $\overrightarrow{HH'}$ et d'un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{HH'}$.

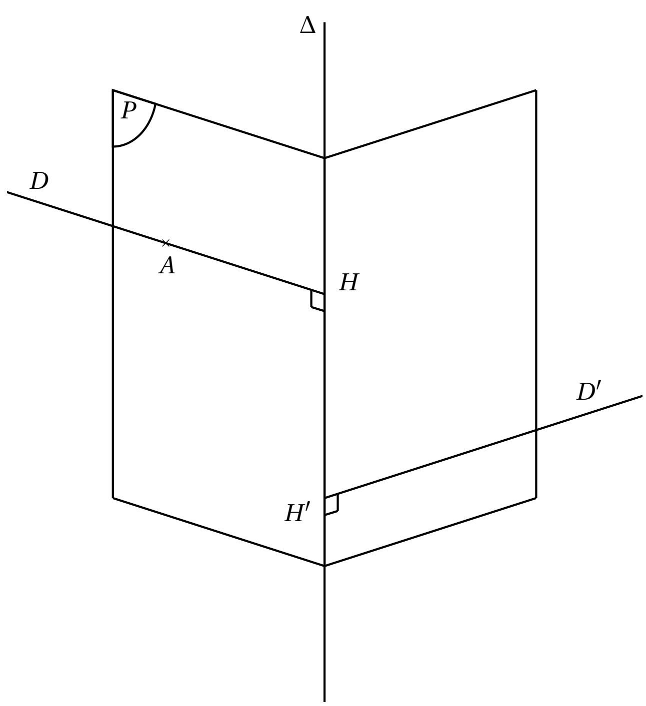
b. En déduire que $\left\|\overrightarrow{MM'}\right\|^2 \geqslant \left\|\overrightarrow{HH'}\right\|^2$ et conclure.

La longueur HH' réalise donc le minimum des distances entre une point de D et une point de D'. On l'appelle distance entre les droites D et D'.

Annexe 1, exercice 2



Annexe 2, exercice 4 (non spé)



∽ Baccalauréat S Asie 21 juin 2011 ∽

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Étude d'une fonction f On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

La courbe $\mathcal{C}_f$ est représentée en annexe 1 (à rendre avec la copie).

a. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

b. Calculer la dérivée f' de la fonction f.

c. En déduire les variations de la fonction f.

2. Étude d'une fonction g

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}.$$

On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

a. Déterminer la limite de g en 0, puis en $+\infty$.

Après l'avoir justifiée, on utilisera la relation : $\dfrac{(\ln x)^2}{x} = 4\left(\dfrac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$.

b. Calculer la dérivée g' de la fonction g.

c. Dresser le tableau de variation de la fonction g.

3. **a.** Démontrer que les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ possèdent deux points communs dont on précisera les coordonnées.

b. Étudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

c. Tracer sur le graphique de l'annexe 1 (à rendre avec la copie) la courbe C , g .

4. On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan délimitée, d'une part par les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, et d'autre part par les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \text{e}$.

En exprimant l'aire $\mathcal{A}$ comme différence de deux aires que l'on précisera, calculer l'aire $\mathcal{A}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans le plan complexe on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = -2$, $b = 5\text{i}$ et $c = 4$ ainsi que les carrés ABIJ, AKLC et BCMN, extérieurs au triangle ABC, de centres respectifs S, T et U.

La figure est donnée en **annexe 2**.

1. Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.En déduire que le point J a pour affixe $-7+2\text{i}$.
   On admettra que l'affixe du point K est - 2 - 6i.
2. Justifier que les droites (BK) et (JC) sont perpendiculaires et que les segments [BK] et [JC] ont la même longueur. Calculer cette longueur.
3. **a.** Calculer les affixes des points S et T.
   b. Déterminer l'affixe du point U.
   c. Démontrer que la droite (AU) est une hauteur du triangle STU.
4. Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{JC}}, \overrightarrow{\text{AU}}\right)$.
5. On admet que les droites (BK) et (JC) se coupent au point V d'affixe $v = -0,752+0,864\text{i}$.
   a. Établir que les points A, V et U sont alignés.
   b. Que représente la droite (AU) pour l'angle $\widehat{\text{BVC}}$?

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

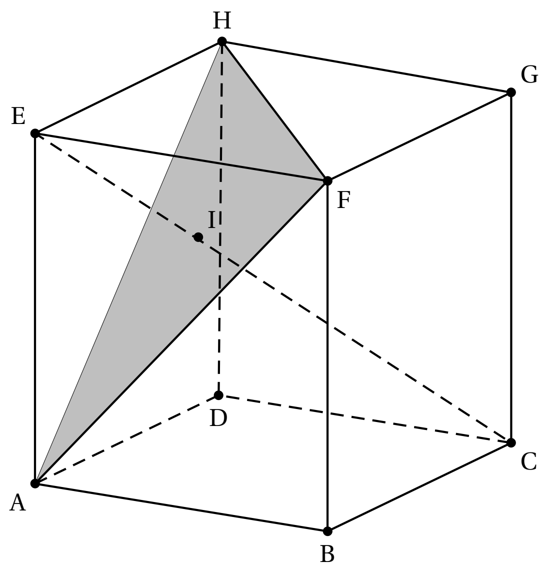
On considère un cube ABCDEFGH, d'arête de longueur 1. On note I le point d'intersection de la droite (EC) et du plan (AFH).

1. On se place dans le repère $\left(\text{D}~;~\overrightarrow{\text{DA}}, \overrightarrow{\text{DC}}, \overrightarrow{\text{DH}}\right)$.
   Dans ce repère, les sommets du cube ont pour coordonnées :

   A(1 ; 0 ; 0) B(1 ; 1 ; 0) C(0 ; 1 ; 0) D(0 ;0 ; 0) E(1 ;0 ; 1) F(1 ; 1 ; 1) C(0 ; 1 ; 1) H(0 ;0 ; 1)

   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EC).
   b. Déterminer une équation cartésienne du plan (AFH).
   c. En déduire les coordonnées du point I, puis montrer que le point I est le projeté orthogonal du point E sur le plan (AFH).
   d. Vérifier que la distance du point E au plan (AFH) est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
   e. Démontrer que la droite (HI) est perpendiculaire à la droite (AF).
   Que représente le point I pour le triangle AFH ?
2. *Dans la suite de cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Définitions :
   - un tétraèdre est dit de type 1 si ses faces ont même aire ;
   - il est dit de type 2 si les arêtes opposées sont orthogonales deux à deux ;
   - il est dit de type 3 s'il est à la fois de type 1 et de type 2.

   Préciser de quel(s) type(s) est le tétraèdre EAFH.



EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On admet que la durée de vie (exprimée en années) d'un certain type de capteur de lumière peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ (λ strictement positif), c'est-à-dire que la probabilité que ce capteur tombe en panne avant l'année t (t positif) s'exprime par :

$$F(t) = p(X \leqslant t) = p([0\,;\,t]) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Restitution organisée de connaissances

Pré-requis :

a. $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$ (où A et B sont deux évènements tels que $p(B) \neq 0$) ;

b. $p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A)$ (où A est un évènement) ;

c. $p([a\,;\,b]) = F(b) - F(a)$ (où a et b sont des nombres réels positifs tels que $a \leqslant b$).

Démontrer que, pour tout nombre réel positif s, on a :

$$p_{[t\,;\,+\infty[}([t\,;\,t+s]) = \frac{F(t+s) - F(t)}{1 - F(t)},$$

et que $p_{[t\,;\,+\infty[}([t\,;\,t+s])$ est indépendant du nombre réel t.

Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0,2$.

2. Démontrer que la probabilité que le capteur ne tombe pas en panne au cours des deux premières années est égale à $\mathrm{e}^{-0,4}$.

3. Sachant que le capteur n'est pas tombé en panne au cours des deux premières années, quelle est, arrondie au centième, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans ?

4. On considère un lot de 10 capteurs, fonctionnant de manière indépendante.

Dans cette question, les probabilités seront **arrondies à la sixième décimale**.

a. Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait exactement deux capteurs qui ne tombent pas en panne au cours des deux premières années.

b. Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un capteur qui ne tombe pas en panne au cours des deux premières années.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : Restitution organisée de connaissances

1. Pré-requis : tout nombre entier n strictement supérieur à 1 admet au moins un diviseur premier.

   Démontrer que tout nombre entier n strictement supérieur à 1 est premier ou peut se décomposer en produit de facteurs premiers (on ne demande pas de démontrer l'unicité de cette décomposition).
2. Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de 629.

Partie B

Dans un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, on considère les surfaces Γ et C d'équations respectives : $\Gamma : z = xy$ et $C : x^2 + z^2 = 1$.

1. Donner la nature de la surface C et déterminer ses éléments caractéristiques.
2. Points d'intersection à coordonnées entières des surfaces Γ et C
   a. Démontrer que les coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ des points d'intersection de Γ et de C sont telles que :
   $$x^2\left(1+y^2\right) = 1.$$
   b. En déduire que Γ et C ont deux points d'intersection dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs.
3. Points d'intersection à coordonnées entières de Γ et d'un plan

   Pour tout nombre entier naturel non nul n, on désigne par P_n le plan d'équation $z = n^4 + 4$.

   a. Déterminer l'ensemble des points d'intersection de Γ et du plan P_1 dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs.

   Pour la suite de l'exercice, on suppose $n \geqslant 2$.

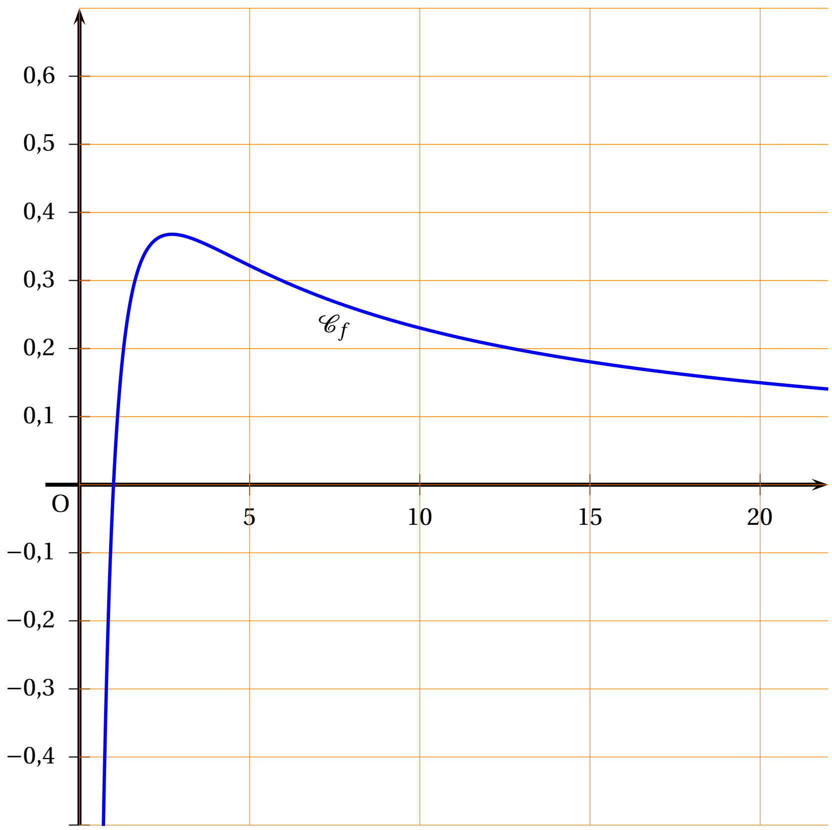
   b. Vérifier que : $\left(n^2 - 2n + 2\right)\left(n^2 + 2n + 2\right) = n^4 + 4$.

   c. Démontrer que, quel que soit le nombre entier naturel $n \geqslant 2$, $n^4 + 4$ n'est pas premier.

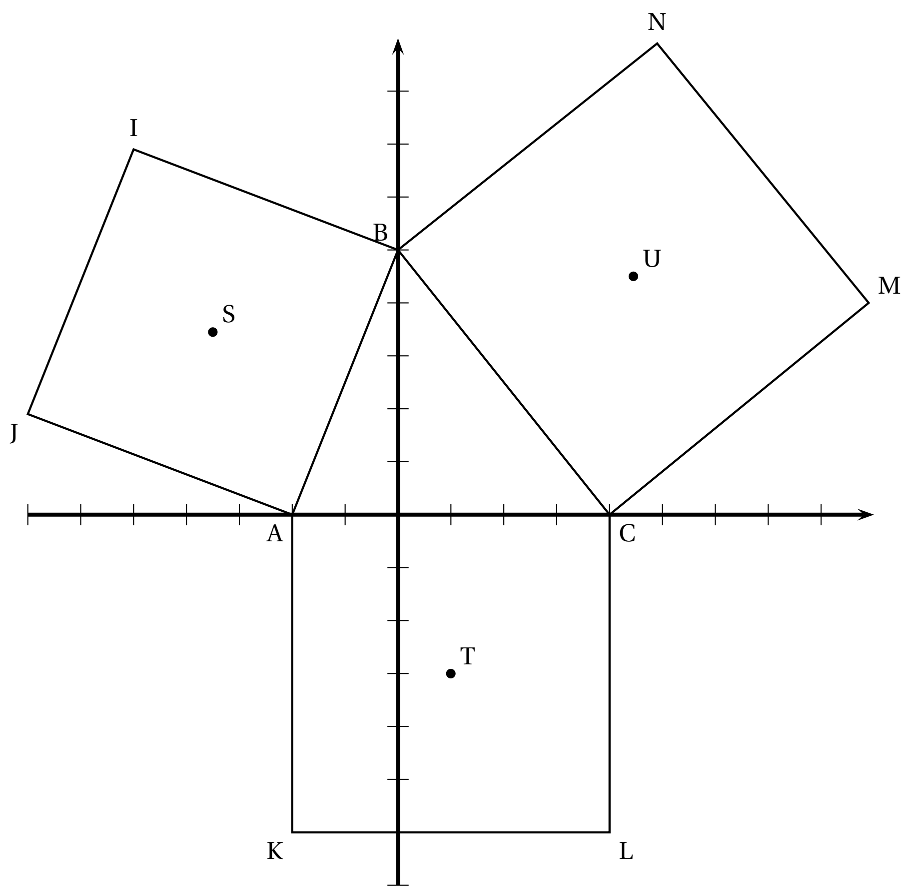
   d. En déduire que le nombre de points d'intersection de Γ et du plan P_n dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs est supérieur ou égal à 8.

   e. Déterminer les points d'intersection de Γ et du plan P_5 dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs.

Annexe 1 (exercice 1)



Annexe 2 (exercice 2)



Durée : 4 heures

Baccalauréat S Centres étrangers 16 juin 2011

Exercice 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

On considère une droite $\mathscr{D}$ munie d'un repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath}\right)$.

Soit (A_n) la suite de points de la droite $\mathscr{D}$ ainsi définie :

- A_0 est le point O ;
- A_1 est le point d'abscisse 1 ;
- pour tout entier naturel n, le point A_{n+2} est le milieu du segment $[A_n A_{n+1}]$.

1. **a.** Placer sur un dessin la droite $\mathscr{D}$, les points A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 et A_6. On prendra 10 cm comme unité graphique.

   b. Pour tout entier naturel n, on note a_n l'abscisse du point A_n. Calculer a_2, a_3, a_4 a_5 et a_6.

   c. Pour tout entier naturel n, justifier l'égalité : $a_{n+2} = \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$.

2. Démontrer par récurrence, que pour tout entier n, $a_{n+1} = -\dfrac{1}{2}a_n + 1$.
3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = a_n - \dfrac{2}{3}$.

   Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$.
4. Déterminer la limite de la suite (v_n), puis celle de la suite (a_n).

Exercice 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les cinq questions sont indépendantes.
Pour chaque question une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse qui n'est pas justifiée ne sera pas prise en compte. Toute justification incomplète sera valorisée.

Question 1

On considère, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = 1 + \text{i},\quad b = 3\text{i},\quad c = \left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right) + \text{i}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\right).$$

Affirmation

Le triangle ABC est un triangle équilatéral.

Question 2

On considère, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$, la transformation f dont une écriture complexe est : $z' = \left(\dfrac{2\text{i}}{\sqrt{3} + \text{i}}\right)z$.

Affirmation

La transformation f est la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

Question 3

On considère le nombre complexe $a = \left(-\sqrt{3} + \text{i}\right)^{2011}$.

Affirmation
Le nombre complexe a est un nombre imaginaire pur.

Question 4
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un nombre strictement positif.
On rappelle que, pour tout réel t strictement positif, la probabilité de l'évènement $(X \leqslant t)$ s'exprime par $P(X \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$.
Affirmation
Sachant que $X \geqslant 2$, la probabilité que X appartienne à l'intervalle $[2\,;\,3]$ est égale à $1 - \mathrm{e}^{-\lambda}$.

Question 5
Une urne contient au total n boules dont cinq sont blanches et les autres noires.
On effectue 10 tirages successifs indépendants en remettant la boule dans l'urne après chaque tirage.
Affirmation
La plus petite valeur de l'entier n, pour laquelle la probabilité d'obtenir au moins une boule noire sur les 10 tirages est supérieure ou égale à 0,9999, est égale à 13.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les cinq questions sont indépendantes.
Pour chaque question une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.
Toute justification complète sera valorisée.

Question 1
On considère l'équation (E) : $2x + 11y = 7$, où x et y sont des entiers relatifs.
Affirmation
Les seuls couples solutions de (E) sont les couples $(22k - 2\,;\,-4k + 1)$, avec k appartenant à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

Question 2
On considère l'entier $N = 11^{2011}$.
Affirmation
L'entier N est congru à 4 modulo 7.

Question 3
On considère, dans le plan complexe, les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = 1 + \mathrm{i} \quad ; \quad b = 3\mathrm{i} \quad ; \quad c = \left(1 - 2\sqrt{2}\right) + \mathrm{i}\left(1 - \sqrt{2}\right).$$

Affirmation
Le point C est l'image du point B par la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

Question 4
On considère, dans le plan complexe, les points A et B d'affixes respectives :

$$a = 1 + \mathrm{i} \quad ; \quad b = 2 - \mathrm{i}.$$

Soit f la similitude d'écriture complexe : $z' = \left(-\dfrac{3}{5} - \dfrac{4}{5}\mathrm{i}\right)\overline{z} + \left(\dfrac{12}{5} + \dfrac{6}{5}\mathrm{i}\right)$.
Affirmation
La transformation f est la réflexion d'axe (AB).

Question 5
L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

On considère la surface $\mathscr{S}$ dont une équation est : $z = 4xy$.

Affirmation

La section de la surface $\mathscr{S}$ par le plan d'équation $z = 0$ est la réunion de deux droites orthogonales.

EXERCICE 3 **5 points**

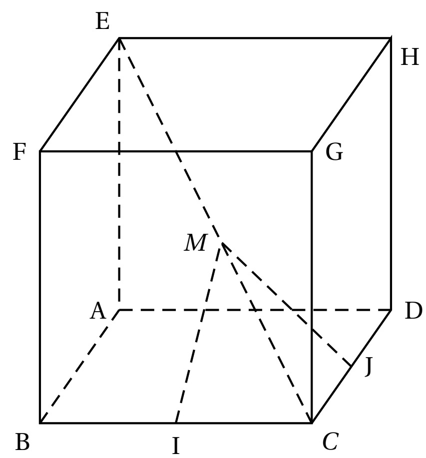
Commun à tous les candidats

La figure ci-contre représente un cube ABCDEFGH d'arête 1.

On désigne par I et J les milieux respectifs des arêtes [BC] et [CD].

Soit M un point quelconque du segment [CE].

Dans tout l'exercice, on se place dans le repère orthonormal $\left(\text{A} ; \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.



1. **a.** Donner, sans justification, les coordonnées des points C, E, I et J.

   b. Justifier l'existence d'un réel t appartenant à l'intervalle $[0 ; 1]$, tel que les coordonnées du point M soient $(1-t\,;\,1-t\,;\,t)$.

2. **a.** Démontrer que les points C et E appartiennent au plan médiateur du segment [IJ].

   b. En déduire que le triangle MIJ est un triangle isocèle en M.

   c. Exprimer IM^2 en fonction de t.

3. Le but de cette question est de déterminer la position du point M sur le segment [CE] pour laquelle la mesure de l'angle $\widehat{\text{I}M\text{J}}$ est maximale.

   On désigne par θ la mesure en radian de l'angle $\widehat{\text{I}M\text{J}}$.

   a. En admettant que la mesure θ appartient à l'intervalle $[0 ; \pi]$, démontrer que la mesure θ est maximale lorsque $\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ est maximal.

   b. En déduire que la mesure est maximale lorsque la longueur IM est minimale.

   c. Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par :

   $$f(t) = 3t^2 - t + \frac{1}{4}.$$

   d. En déduire qu'il existe une unique position M_0 du point M sur le segment [EC] telle que la mesure de l'angle $\widehat{\text{I}M\text{J}}$ soit maximale.

   e. Démontrer que le point M_0 est le projeté orthogonal du point I sur le segment [EC].

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

Soient f et g les fonctions définies sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

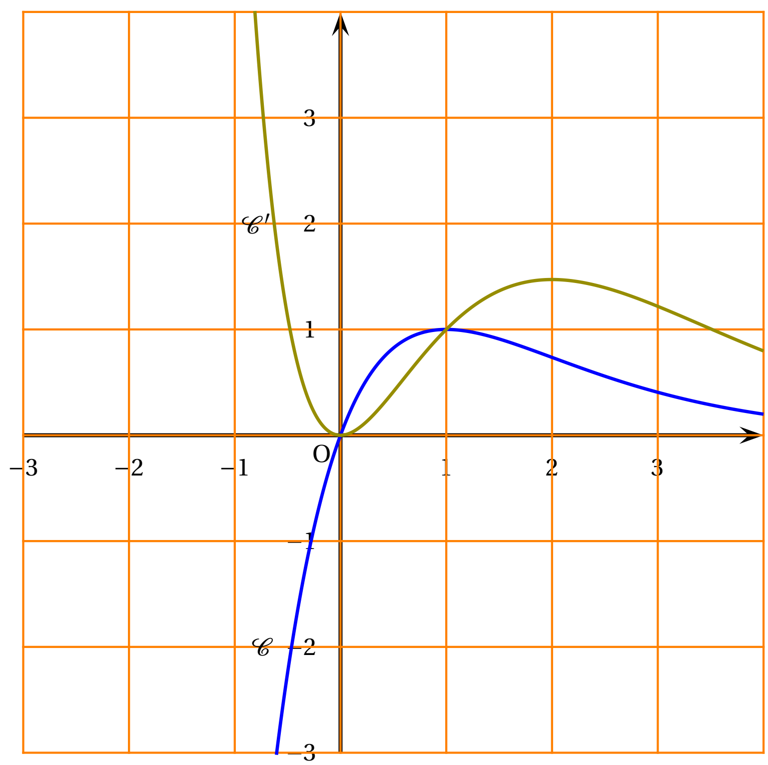
$$f(x) = x\mathrm{e}^{1-x} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2\mathrm{e}^{1-x}.$$

Les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ sont respectivement notées $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. leur tracé est donné en annexe.

1. **Étude des fonctions f et g**
   a. Déterminer les limites des fonctions f et g en $-\infty$.
   b. Justifier le fait que fonctions f et g ont pour limite 0 en $+\infty$.
   c. Étudier le sens de variations de chacune des fonctions f et g et dresser leurs tableaux de variations respectifs.
2. **Calcul d'intégrales**
   Pour tout entier naturel n, on définit l'intégrale I_n par :
   $$I_0 = \int_0^1 \text{e}^{1-x}\,\text{d}x \quad \text{et , si } n \geqslant 1,\ I_n = \int_0^1 x^n \text{e}^{1-x}\,\text{d}x.$$
   a. Calculer la valeur exacte de I_0.
   b. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n :
   $$I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n.$$
   c. En déduire la valeur exacte de I_1, puis celle de I_2.
3. **Calcul d'une aire plane**
   a. Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.
   b. On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan comprise d'une part entre les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, d'autre part entre les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.
   En exprimant $\mathscr{A}$ comme différence de deux aires que l'on précisera, démontrer l'égalité :
   $$\mathscr{A} = 3 - \text{e}.$$
4. **Étude de l'égalité de deux aires**
   Sopit a un réel strictement supérieur à 1.
   On désigne par $S(a)$ l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan comprise d'une part entre les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, d'autre part entre les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = a$.
   On admet que $S(a)$ s'exprime par :
   $$S(a) = 3 - \text{e}^{1-a}\left(a^2 + a + 1\right).$$
   L'objectif de cette question est de prouver qu'il existe une et une seule valeur de a pour laquelle les aires $\mathscr{A}$ et $S(a)$ sont égales.
   a. Démontrer que l'équation $S(a) = \mathscr{A}$ est équivalente à l'équation : $\text{e}^a = a^2 + a + 1$.
   b. *Dans cette question, toute trace d'argumentation, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Conclure, quant à l'existence et l'unicité du réel a, solution du problème posé.

Annexe

(Courbes de l'exercice 4)



∽ Baccalauréat S La Réunion 22 juin 2011 ∾

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie. Chaque réponse exacte rapprte 1 point. Aucune justification n'est demandée. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
On désigne par $\mathscr{P}$ le plan d'équation $2x+3y-z+4=0$ et, par A et B les points de coordonnées respectives $(1\ ;\ 2\ ;\ -4)$ et $(-3\ ;\ 4\ ;\ 1)$.

1. Soit $\mathscr{D}$ la droite ayant pour représentation paramétrique :
$$\left\{\begin{array}{lcr} x &=& -8+2t\\ y &=& 7-t \quad t\in\mathbb{R}.\\ z &=& 6+t\end{array}\right.$$
   - Le plan $\mathscr{P}$ et la droite $\mathscr{D}$ sont sécants.
   - Le plan $\mathscr{P}$ et la droite $\mathscr{D}$ n'ont aucun point en commun.
   - La droite $\mathscr{D}$ est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.
   - Aucune des trois affirmations précédentes n'est vraie.
2. On note $\mathscr{P}'$ le plan d'équarion $x+4y-3z+4=0$.
   - Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles et distincts.
   - Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont confondus.
   - Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants suivant une droite de vecteur directeur $-\vec{\imath}+\vec{\jmath}+2\vec{k}$.
   - Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants suivant une droite de vecteur directeur $-\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}$.
3. L'ensemble des points M de l'espace qui sont équidistants des points A et B est :
   - une droite passant par le point C de coordonnées $\left(-1\ ;\ 3\ ;\ -\dfrac{1}{2}\right)$,
   - une sphère de rayon $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$.
   - le plan d'équation $-4x+2y+5z-\dfrac{5}{2}=0$,
   - le plan d'équation $-4x+2y+5z+\dfrac{5}{2}=0$.
4. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\left\|\overrightarrow{M\text{A}}-3\overrightarrow{M\text{B}}\right\|=5$ est :
   - une sphère dont le centre a pour coordonnées $\left(-5\ ;\ 5\ ;\ \dfrac{7}{2}\right)$,
   - une sphère dont le centre a pour coordonnées $\left(5\ ;\ -5\ ;\ -\dfrac{7}{2}\right)$,
   - le plan d'équation $-4x+2y+5z-5=0$,
   - le plan d'équation $-4x+2y+5z+\dfrac{5}{3}=0$.

EXERCICE 2 **5 points**
Commun à tous les candidats

Les trois questions peuvent être traitées de façon indépendante

Un candidat participe à un jeu télévisé qui comporte deux épreuves. La première consiste à répondre à une question tirée au hasard parmi celles que l'assistante a prélevées dans une urne.

Dans la seconde, il doit répondre à une série de 10 questions sur un thème qu'il choisit.

1. L'urne contient dix bulletins indiscernables au toucher comportant chacun une question.

   Toutes les questions sont différentes, quatre portent sur l'histoire, quatre portent sur la littérature et deux sur le sport.

   En début d'émission, l'assistante tire au hasard et simultanément 4 bulletins de l'urne.

   On note A l'évènement « les quatre questions portent sur l'histoire » et B l'évènement « l'une au moins des quatre questions porte sur le sport ».

   Déterminer la probabilité des évènements A et B.

2. L'animateur annonce les thèmes sur lesquels portent les questions des quatre bulletins choisis par l'assistante. Il y a une question d'histoire, deux de littérature et une sur le sport.

   Le candidat tire au hasard l'un de ces quatre bulletins.

   On admet que la probabilité que sa réponse soit correcte est $0,7$ s'il s'agit d'une question d'histoire, $0,6$ s'il s'agit d'une question de littérature et $0,5$ pour une question sur le sport.

   On considère les évènements suivants :

   H : « la question posée au candidat porte sur l'histoire »
   L : « la question posée au candidat porte sur la littérature »
   S : « la question posée au candidat porte sur le sport »
   C : « le candidat répond correctement à la question posée »

   a. Représenter par un arbre pondéré la situation correspondant à cette première épreuve.

   b. Calculer la probabilité de l'évènement C.

   c. Sachant que le candidat a répondu correctement, quelle est la probabilité que la question posée ait porté sur le sport ?

3. Le candidat a réussi cette première épreuve et choisit l'histoire comme thème pour la seconde épreuve. Les dix questions qu'on lui pose sont indépendantes et on suppose toujours que la probabilité qu'il réponde correctement à chaque question est égale à $0,7$.

   On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de bonnes réponses données par le candidat.

   a. Soit k un entier compris entre 0 et 10.

   Quelle est l'expression de la probabilité de l'évènement $\{X = k\}$ en fonction de k ? On justifiera la réponse.

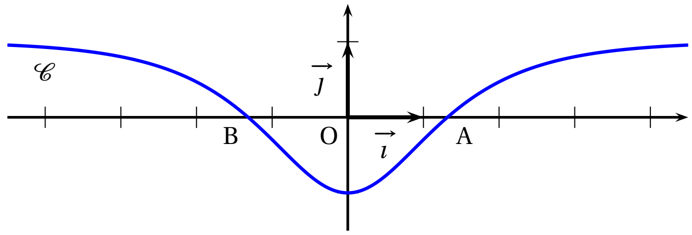
   b. Déterminer la probabilité que le candidat donne au moins neuf bonnes réponses. On arrondira le résultat à 10^{-2}.

EXERCICE 3 **6 points**
Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 1 - \frac{4\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x} + 1}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
Sur le graphique ci-dessous on a tracé la courbe $\mathscr{C}$. Elle coupe l'axe des abscisses aux points A et B.



Partie A

L'objet de cette partie est de démontrer certaines propriétés de la fonction f que l'on peut conjecturer à partir du graphique.

1. La fonction f semble croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

  a. Vérifier que pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{4\mathrm{e}^{x}\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)}{\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)^{2}}$.

  b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

2. La droite d'équation $x = 0$ semble être un axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.
Démontrer que cette conjecture est vraie.

3. On désigne par a l'abscisse du point A et on pose $c = \mathrm{e}^{a}$.

  a. Démontrer que le réel c est une solution de l'équation $x^2 - 4x + 1 = 0$.
  En déduire la valeur exacte de a.

  b. Donner le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

Partie B

L'objet de cette partie est d'étudier quelques propriétés de la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Déterminer les variations de la fonction F sur $\mathbb{R}$.

2. Interpréter géométriquement le réel $F(a)$. En déduire que $-a \leqslant F(a) \leqslant 0$.

3. On cherche la limite éventuelle de F en $+\infty$.

  a. Démontrer que pour tout réel positif t, $f(t) \geqslant 1 - 4\mathrm{e}^{-t}$.

  b. En déduire que pour tout réel positif x, $F(x) \geqslant x - 4$ et déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

4. *Dans cette question. toute trace de recherche ou d'initiative, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

EXERCICE 4 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

Partie A - Restitution organisée de connaissances

Soient A, B deux points du plan d'affixes respectives a et b.
On rappelle que :

* $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right) = \arg(b-a) + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

* L'image du point B par la rotation de centre A et d'angle θ est le point C défini par :

$$AC = AB \quad \text{et} \quad \text{si } A \neq B,\ \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \theta + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}.$$

Exprimer l'affixe c du point C en fonction de a, b et θ.

Partie B

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^2 - 6z + 9 = 0$.
   Dans la suite de l'exercice, on désigne par P, Q et R les points d'affixes respectives

$$z_{\text{P}} = \frac{3}{2}(1+\text{i}), \quad z_{\text{Q}} = \frac{3}{2}(1-\text{i}) \quad \text{et} \quad z_{\text{R}} = -2\text{i}\sqrt{3}.$$

2. Placer les points P, Q, R sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure de la résolution de l'exercice.
3. On note S le symétrique du point R par rapport au point Q.
   Vérifier que l'affixe z_{S} du point S est $3 + \text{i}\left(2\sqrt{3} - 3\right)$.
4. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   Déterminer les affixes z_{A} et z_{C} des points A et C, images respectives des points R et S par la rotation r.
5. On désigne par B et D les images respectives des points S et R par la translation de vecteur $3\overrightarrow{v}$.
   Calculer les affixes z_{B} et z_{D} des points B et D.
6. **a.** Démontrer que $\dfrac{z_{\text{C}} - z_{\text{P}}}{z_{\text{B}} - z_{\text{P}}} = \text{i}$.

   b. En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

Partie A - Restitution organisée de connaissances

Soient A, B deux points du plan d'affixes respectives a et b.
On rappelle que :

* $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}\right) = \arg(b - a) + 2n\pi$ où $n \in \mathbb{Z}$.

* L'image du point B par la similitude directe de centre A, de rapport $k (k > 0)$ et d'angle θ est le point C défini par :

$$AC = kAB \quad \text{et} \quad \text{si } A \neq B,\ \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \theta + 2n\pi \text{ où } n \in \mathbb{Z}.$$

Exprimer l'affixe c du point C en fonction de a, b, θ et k.

Partie B

On considère l'équation (E) : $3x - 2y = 1$.

1. **a.** Montrer que le couple $(-1\ ;\ -2)$ est une solution de (E).

   b. Déterminer tous les couples $(x\ ;\ y)$ d'entiers relatifs vérifiant l'équation (E).
2. Soient d et d' les droites d'équations respectives $y = 2x + 4$ et $3x - 2y = 1$.

a. Vérifier que pour tout entier relatif k, le point A_k de coordonnées $(k - 3\ ;\ 2k - 2)$ appartient à la droite d.

On admettra que ce sont les seuls points de d à coordonnées entières.

b. Montrer que les seuls points de d' à coordonnées entières sont les points $B_{k'}$ de coordonnées $(2k' - 1\ ;\ 3k' - 2)$ où $k' \in \mathbb{Z}$.

3. **a.** Existe-t-il deux entiers relatifs k et k' tels que $A_k = B_{k'}$?

b. Déterminer les entiers relatifs k et k' tels que le segment $[A_k B_{k'}]$ soit parallèle à l'axe des abscisses.

c. Trouver l'entier q tel que $\overrightarrow{A_{3q}B_{2q}} = 4\vec{u}$.

4. Soit Ω un point quelconque du plan dont l'affixe est notée ω. On note H le milieu du segment $[A_6 B_4]$.

On désigne par f la similitude directe de centre Ω, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

a. Donner l'écriture complexe de la similitude f.

b. Déterminer l'affixe du point Ω pour que l'image du point H soit l'origine O du repère.

∽ Baccalauréat S Métropole 21 juin 2011 ∾

Exercice 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

Les deux parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4}.
Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus.

PARTIE A

On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de $0,99$ (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de $0,97$ (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.
On note V l'évènement « la personne est contaminée par le virus » et T l'évènement « le test est positif ».
$\overline{V}$ et $\overline{T}$ désignent respectivement les évènements contraires de V et T.

1. **a.** Préciser les valeurs des probabilités $P(V)$, $P_V(T)$, $P_{\overline{V}}(\overline{T})$.
   Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

   b. En déduire la probabilité de l'évènement $V \cap T$.
2. Démontrer que la probabilité que le test soit positif est 0,049 2.
3. **a.** Justifier par un calcul la phrase :
   « Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée ».

   b. Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

PARTIE B

On choisit successivement 10 personnes de la population au hasard, on considère que les tirages sont indépendants.
On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes contaminées par le virus parmi ces 10 personnes.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les 10.

Exercice 2 **4 points**
Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie. Chaque réponse exacte rapporte un point. Aucune justification n'est demandée. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On désigne par A, B, C, D les points d'affixes respectives $z_{\text{A}} = 1$, $z_{\text{B}} = \text{i}$, $z_{\text{C}} = -1$, $z_{\text{D}} = -\text{i}$.

1. L'image E du point D par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ a pour affixe :

- $z = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}(1+\mathrm{i})$,
- $z = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}(1-\mathrm{i})$,
- $z = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}(1-\mathrm{i})$,
- $z = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}(1+\mathrm{i})$,

2. L'ensemble des points d'affixe z telle que $|z+\mathrm{i}| = |z-1|$ est :

- la médiatrice du segment [BC],
- le milieu du segment [BC],
- le cercle de centre O et de rayon 1,
- la médiatrice du segment [AD].

3. L'ensemble des points d'affixe z telle que $\dfrac{z+\mathrm{i}}{z+1}$ soit un imaginaire pur est :

- la droite (CD) privée du point C,
- le cercle de diamètre [CD] privé du point C,
- le cercle de diamètre [BD] privé du point C,
- la médiatrice du segment [AB].

4. L'ensemble des points d'affixe z telle que $\arg(z-i) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ est :

- le demi-cercle de diamètre [BD] passant par A,
- la droite (BD),
- la demi-droite]BD) d'origine B passant par D privée de B,
- le cercle de diamètre [BD] privé de B et D.

EXERCICE 3 **7 points**

Commun à tous les candidats

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on désigne par f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

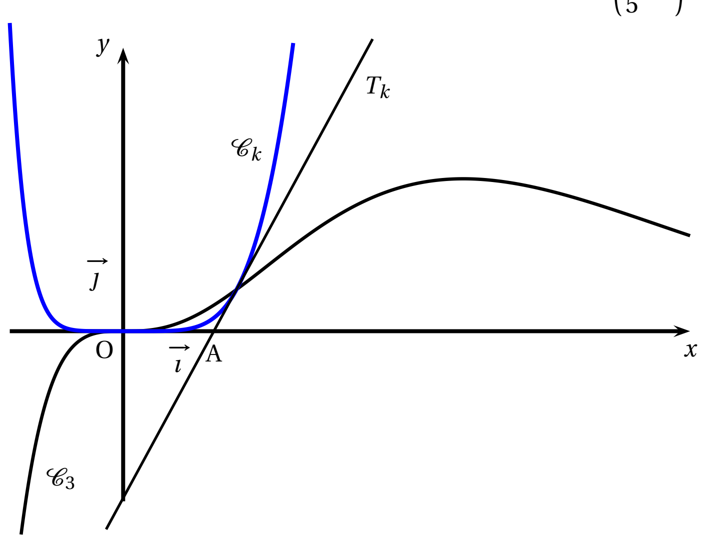
$$f_n(x) = x^n \mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan.

PARTIE A

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté une courbe $\mathscr{C}_k$ où k est un entier naturel non nul, sa tangente T_k au point d'abscisse 1 et la courbe $\mathscr{C}_3$.

La droite T_k coupe l'axe des abscisses au point A de coordonnées $\left(\dfrac{4}{5}\ ;\ 0\right)$.



1. **a.** Déterminer les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b. Étudier les variations de la fonction f_1 et dresser le tableau de variations de f_1.
   c. À l'aide du graphique, justifier que k est un entier supérieur ou égal à 2.
2. **a.** Démontrer que pour $n \geqslant 1$, toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ passent par le point O et un autre point dont on donnera les coordonnées.
   b. Vérifier que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, et pour tout réel x,

$$f_n'(x) = x^{n-1}(n-x)\mathrm{e}^{-x}.$$

3. Sur le graphique, la fonction f_3 semble admettre un maximum atteint pour $x = 3$.
   Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.
4. **a.** Démontrer que la droite T_k coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(\dfrac{k-2}{k-1}\ ;\ 0\right)$.
   b. En déduire, à l'aide des données de l'énoncé, la valeur de l'entier k.

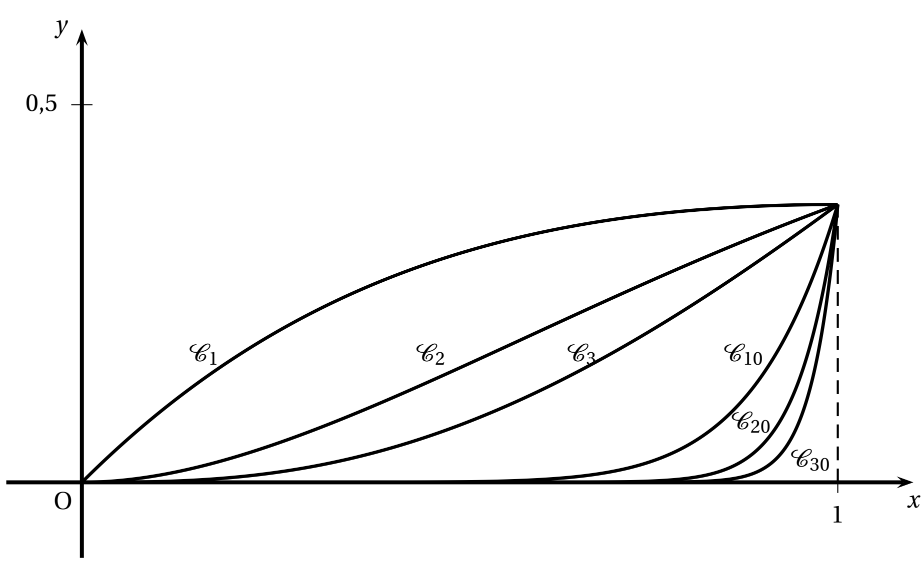
PARTIE B

On désigne par (I_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par

$$I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_1.
2. *Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les portions des courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$, $\mathscr{C}_{10}$, $\mathscr{C}_{20}$, $\mathscr{C}_{30}$ comprises dans la bande définie par $0 \leqslant x \leqslant 1$.



   a. Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) en décrivant sa démarche.
   b. Démontrer cette conjecture.
   c. En déduire que la suite (I_n) est convergente.

d. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} (I_n)$.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

Partie A – Restitution organisée de connaissances

On désigne par $\mathcal{P}$ le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et par M_0 le point de coordonnées $\left(x_0 ; y_0 ; z_0\right)$. On appelle H le projeté orthogonal du point M_0 sur le plan $\mathcal{P}$.

On suppose connue la propriété suivante :

Propriété : Le vecteur $\vec{n} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

Le but de cette partie est de démontrer que la distance $d(M_0, \mathcal{P})$ du point M_0 au plan $\mathcal{P}$, c'est-à-dire la distance M_0H, est telle que

$$d(M_0, \mathcal{P}) = \frac{\left|ax_0 + by_0 + cz_0 + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

1. Justifier que $\left|\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0H}\right| = M_0H\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
2. Démontrer que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0H} = -ax_0 - by_0 - cz_0 - d$.
3. Conclure.

Partie B

On désigne par A, B, C, F les points de coordonnées respectives $(4 ; 1 ; 5)$, $(-3 ; 2 ; 0)$, $(1 ; 3 ; 6)$, $(-7 ; 0 ; 4)$.

1. **a.** Démontrer que les points A, B, C définissent un plan $\mathcal{P}$ et que ce plan a pour équation cartésienne $x + 2y - z - 1 = 0$.

   b. Déterminer la distance d du point F au plan $\mathcal{P}$.
2. Le but de cette question est de calculer la distance d par une autre méthode.

   On appelle Δ la droite qui passe par le point F et qui est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.

   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

   b. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point F sur le plan $\mathcal{P}$.

   c. Retrouver le résultat de la question 1. b.
3. Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre F et de rayon 6.

   a. Justifier que le point B appartient à la sphère $\mathcal{S}$.

   b. Préciser le centre et déterminer le rayon du cercle $\mathcal{C}$, intersection de la sphère $\mathcal{S}$ et du plan $\mathcal{P}$.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A - Restitution organisée de connaissances

On rappelle ci-dessous le théorème de BÉZOUT et le théorème de GAUSS.

Théorème de BÉZOUT :

Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si et seulement si, il existe un couple $(u ; v)$ d'entiers relatifs vérifiant $au + bv = 1$.

Théorème de GAUSS :

Soient a, b, c des entiers relatifs.

Si a divise le produit bc et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c.

1. En utilisant le théorème de BÉZOUT, démontrer le théorème de GAUSS.
2. Soient p et q deux entiers naturels tels que p et q sont premiers entre eux.
   Déduire du théorème de GAUSS que, si a est un entier relatif, tel que $a \equiv 0 \quad [p]$ et $a \equiv 0 \quad [q]$, alors $a \equiv 0 \quad [pq]$.

PARTIE B

On se propose de déterminer l'ensemble $\mathscr{S}$ des entiers relatifs n vérifiant le système :

$$\left\{\begin{array}{lcll} n & \equiv & 9 & [17] \\ n & \equiv & 3 & [5] \end{array}\right.$$

1. Recherche d'un élément de $\mathscr{S}$.
   On désigne par $(u\ ;\ v)$ un couple d'entiers relatifs tel que $17u + 5v = 1$.
   a. Justifier l'existence d'un tel couple $(u\ ;\ v)$.
   b. On pose $n_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v$.
   Démontrer que n_0 appartient à $\mathscr{S}$.
   c. Donner un exemple d'entier n_0 appartenant à $\mathscr{S}$.
2. Caractérisation des éléments de $\mathscr{S}$.
   a. Soit n un entier relatif appartenant à $\mathscr{S}$.
   Démontrer que $n - n_0 \equiv 0 \quad [85]$.
   b. En déduire qu'un entier relatif n appartient à $\mathscr{S}$ si et seulement si il peut s'écrire sous la forme $n = 43 + 85k$ où k est un entier relatif.
3. Application
   Zoé sait qu'elle a entre 300 et 400 jetons.
   Si elle fait des tas de 17 jetons, il lui en reste 9.
   Si elle fait des tas de 5 jetons, il lui en reste 3.
   Combien a-t-elle de jetons ?