✤ Baccalauréat S 2014 ✤

L'intégrale d'avril 2014 à juin 2014

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

À la fin index des notions abordées
À la fin de chaque exercice cliquez sur * pour aller à l'index

∽ Baccalauréat S Pondichéry 8 avril 2014 ∽

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, sauf indication contraire, les résultats seront arrondis au centième.

1. La durée de vie, exprimée en années, d'un moteur pour automatiser un portail fabriqué par une entreprise A est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif.
   On sait que $P(X \leqslant 2) = 0,15$.
   Déterminer la valeur exacte du réel λ.

Dans la suite de l'exercice on prendra $0,081$ pour valeur de λ.

2. **a.** Déterminer $P(X \geqslant 3)$.
   b. Montrer que pour tous réels positifs t et h, $P_{X \geqslant t}(X \geqslant t+h) = P(X \geqslant h)$.
   c. Le moteur a déjà fonctionné durant 3 ans. Quelle est la probabilité pour qu'il fonctionne encore 2 ans ?
   d. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et donner une interprétation de ce résultat.
3. **Dans la suite de cet exercice, on donnera des valeurs arrondies des résultats à 10^{-3}**
   L'entreprise A annonce que le pourcentage de moteurs défectueux dans la production est égal à 1 %. Afin de vérifier cette affirmation 800 moteurs sont prélevés au hasard. On constate que 15 moteurs sont détectés défectueux.
   Le résultat de ce test remet-il en question l'annonce de l'entreprise A ? Justifier. On pourra s'aider d'un intervalle de fluctuation.

*

EXERCICE 2 **4 points**
Commun à tous les candidats

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée.
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.
Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. **Proposition 1**
   Toute suite positive croissante tend vers $+\infty$.
2. g est la fonction définie sur $\left]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ par

$$g(x) = 2x\ln(2x+1).$$

   Proposition 2
   Sur $\left]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$, l'équation $g(x) = 2x$ a une unique solution : $\frac{\mathrm{e}-1}{2}$.
   Proposition 3
   Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ est : $1+\ln 4$.

3. L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

   $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ sont les plans d'équations respectives : $2x+3y-z-11=0$ et $x+y+5z-11=0$.

   Proposition 4

   Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ se coupent perpendiculairement.

*

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi la spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n défini par :

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right) z_n.$$

On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$ pour tout entier naturel n.

1. Donner la forme exponentielle du nombre complexe $\dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$.
2. **a.** Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   b. En déduire l'expression de r_n en fonction de n.

   c. Que dire de la longueur $\mathrm{O}A_n$ lorsque n tend vers $+\infty$?
3. On considère l'algorithme suivant :

Variables	n entier naturel R réel P réel strictement positif
Entrée	Demander la valeur de P

Traitement	R prend la valeur 1
	n prend la valeur 0
	Tant que $R > P$
	    n prend la valeur $n+1$
	    R prend la valeur $\dfrac{\sqrt{3}}{2}R$
	Fin tant que

Sortie	Afficher n

   a. Quelle est la valeur affichée par l'algorithme pour $P = 0,5$?

   b. Pour $P = 0,01$ on obtient $n = 33$. Quel est le rôle de cet algorithme ?
4. **a.** Démontrer que le triangle $\mathrm{O}A_nA_{n+1}$ est rectangle en A_{n+1}.

   b. On admet que $z_n = r_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}$.

   Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est un point de l'axe des ordonnées.

   c. Compléter la figure donnée en annexe, à rendre avec la copie, en représentant les points A_6, A_7, A_8 et A_9.

   Les traits de construction seront apparents.

*

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats ayant suivi la spécialité

Chaque jeune parent utilise chaque mois une seule marque de petits pots pour bébé.
Trois marques X, Y et Z se partagent le marché. Soit n un entier naturel.
On note : X_n l'évènement « la marque X est utilisée le mois n »,
Y_n l'évènement « la marque Y est utilisée le mois n »,
Z_n l'évènement « la marque Z est utilisée le mois n ».
Les probabilités des évènements X_n, Y_n, Z_n sont notées respectivement x_n, y_n, z_n.
La campagne publicitaire de chaque marque fait évoluer la répartition.
Un acheteur de la marque X le mois n, a le mois suivant :

50 % de chance de rester fidèle à cette marque,

40 % de chance d'acheter la marque Y,

10 % de chance d'acheter la marque Z.

Un acheteur de la marque Y le mois n, a le mois suivant :

30 % de chance de rester fidèle à cette marque,

50 % de chance d'acheter la marque X,

20 % de chance d'acheter la marque Z.

Un acheteur de la marque Z le mois n, a le mois suivant :

70 % de chance de rester fidèle à cette marque,

10 % de chance d'acheter la marque X,

20 % de chance d'acheter la marque Y.

1. **a.** Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n, y_n et z_n.
   On admet que :
   $y_{n+1} = 0,4x_n + 0,3y_n + 0,2z_n$ et que $z_{n+1} = 0,1x_n + 0,2y_n + 0,7z_n$.

   b. Exprimer z_n en fonction de x_n et y_n. En déduire l'expression de x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n.

2. On définit la suite (U_n) par $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n.

   On admet que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = A \times U_n + B$ où $A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix}$.

   Au début de l'étude statistique (mois de janvier 2014 : $n = 0$), on estime que $U_0 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,3 \end{pmatrix}$.

   On considère l'algorithme suivant :

Variables	n et i des entiers naturels. A, B et U des matrices
Entrée et initialisation	Demander la valeur de n i prend la valeur 0 A prend la valeur $\begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$ B prend la valeur $\begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix}$ U prend la valeur $\begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,3 \end{pmatrix}$
Traitement	Tant que $i < n$ U prend la valeur $A \times U + B$ i prend la valeur $i + 1$ Fin de Tant que
Sortie	Afficher U

a. Donner les résultats affichés par cet algorithme pour $n = 1$ puis pour $n = 3$.

b. Quelle est la probabilité d'utiliser la marque X au mois d'avril ?

Dans la suite de l'exercice, on cherche à déterminer une expression de U_n en fonction de n.

On note I la matrice $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ et N la matrice $I - A$.

3. On désigne par C une matrice colonne à deux lignes.

a. Démontrer que $C = A \times C + B$ équivaut à $N \times C = B$.

b. On admet que N est une matrice inversible et que $N^{-1} = \begin{pmatrix}\dfrac{45}{23} & \dfrac{20}{23}\\[2mm] \dfrac{10}{23} & \dfrac{30}{23}\end{pmatrix}$.

En déduire que $C = \begin{pmatrix}\dfrac{17}{46}\\[2mm] \dfrac{7}{23}\end{pmatrix}$.

4. On note V_n la matrice telle que $V_n = U_n - C$ pour tout entier naturel n.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = A \times V_n$.

b. On admet que $U_n = A^n \times (U_0 - C) + C$.

Quelles sont les probabilités d'utiliser les marques X, Y et Z au mois de mai ?

*

EXERCICE 4 **7 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. f' est la fonction dérivée de la fonction f.

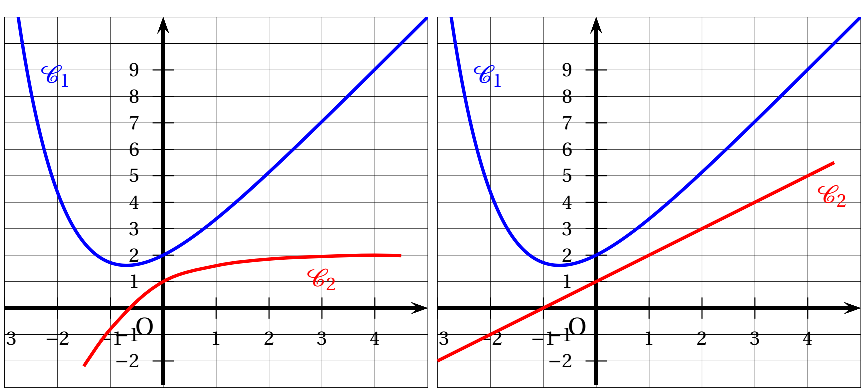
Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on nomme $\mathscr{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f et $\mathscr{C}_2$ la courbe représentative de la fonction f'.

Le point A de coordonnées $(0 ; 2)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_1$.

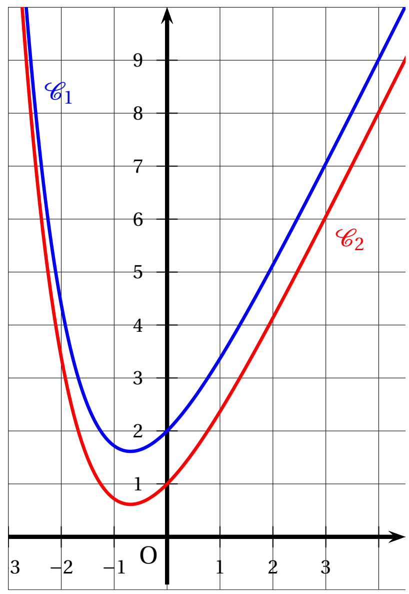
Le point B de coordonnées $(0 ; 1)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_2$.

1. Dans les trois situations ci-dessous, on a dessiné la courbe représentative $\mathscr{C}_1$ de la fonction f. Sur l'une d'entre elles, la courbe $\mathscr{C}_2$ de la fonction dérivée f' est tracée convenablement. Laquelle ? Expliquer le choix effectué.

Situation 1 **Situation 2 ($\mathscr{C}_2$ est une droite)**



Situation 3



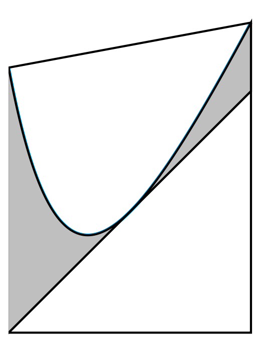
2. Déterminer l'équation réduite de la droite Δ tangente à la courbe $\mathscr{C}_1$ en A.
3. On sait que pour tout réel x, $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + ax + b$ où a et b sont deux nombres réels.
   a. Déterminer la valeur de b en utilisant les renseignements donnés par l'énoncé.
   b. Prouver que $a = 2$.
4. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
5. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

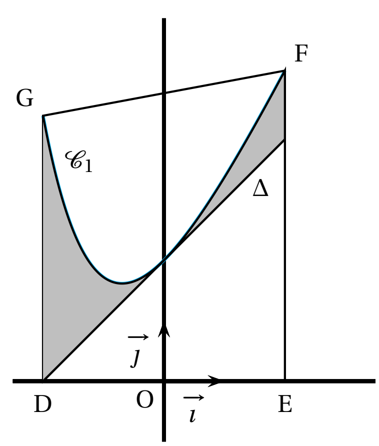
Partie B

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - (x+2)$.

1. a. Montrer que la fonction g admet 0 comme minimum sur $\mathbb{R}$.
   b. En déduire la position de la courbe $\mathscr{C}_1$ par rapport à la droite Δ.

La figure 2 ci-dessous représente le logo d'une entreprise. Pour dessiner ce logo, son créateur s'est servi de la courbe $\mathscr{C}_1$ et de la droite Δ, comme l'indique la figure ci-dessous. Afin d'estimer les coûts de peinture, il souhaite déterminer l'aire de la partie colorée en gris.





Le contour du logo est représenté par le trapèze DEFG où :
- D est le point de coordonnées $(-2\ ;\ 0)$,
- E est le point de coordonnées $(2\ ;\ 0)$,
- F est le point d'abscisse 2 de la courbe $\mathcal{C}_1$,
- G est le point d'abscisse -2 de la courbe $\mathcal{C}_2$.

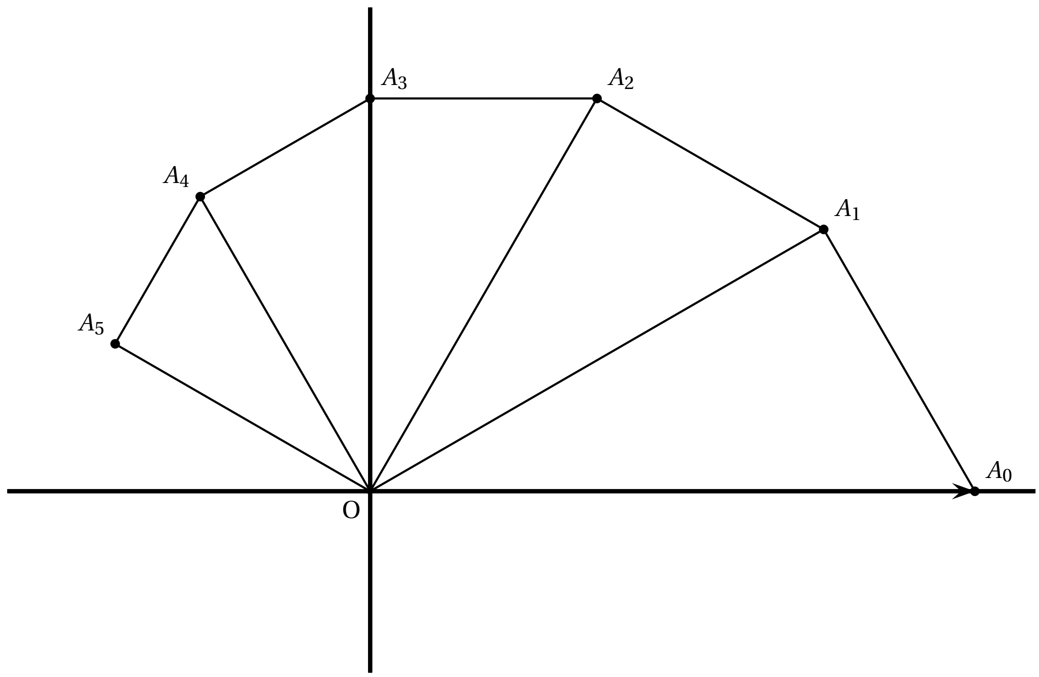
La partie du logo colorée en gris correspond à la surface située entre la droite Δ, la courbe $\mathcal{C}_1$, la droite d'équation $x = -2$ et la droite d'équation $x = 2$.

2. Calculer, en unités d'aire, l'aire de la partie du logo colorée en gris (on donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-2} du résultat).

*

ANNEXE EXERCICE 3

À compléter et à rendre avec la copie



∽ Baccalauréat S Liban 27 mai 2014 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

Les trois parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendante.
Les probabilités seront arrondies au dix millième.

Un élève doit se rendre à son lycée chaque matin pour 8 h 00. Pour cela, il utilise, selon les jours, deux moyens de transport : le vélo ou le bus.

Partie A

L'élève part tous les jours à 7 h 40 de son domicile et doit arriver à 8 h 00 à son lycée.
Il prend le vélo 7 jours sur 10 et le bus le reste du temps.
Les jours où il prend le vélo, il arrive à l'heure dans 99,4 % des cas et lorsqu'il prend le bus, il arrive en retard dans 5 % des cas.
On choisit une date au hasard en période scolaire et on note V l'évènement « L'élève se rend au lycée à vélo », B l'évènement « l'élève se rend au lycée en bus » et R l'évènement « L'élève arrive en retard au lycée ».

1. Traduire la situation par un arbre de probabilités.
2. Déterminer la probabilité de l'évènement $V \cap R$.
3. Démontrer que la probabilité de l'évènement R est 0,0192
4. Un jour donné, l'élève est arrivé en retard au lycée. Quelle est la probabilité qu'il s'y soit rendu en bus ?

Partie B : le vélo

On suppose dans cette partie que l'élève utilise le vélo pour se rendre à son lycée.
Lorsqu'il utilise le vélo, on modélise son temps de parcours, exprimé en minutes, entre son domicile et son lycée par une variable aléatoire T qui suit le loi normale d'espérance $\mu = 17$ et d'écart-type $\sigma = 1,2$.

1. Déterminer la probabilité que l'élève mette entre 15 et 20 minutes pour se rendre à son lycée.
2. Il part de son domicile à vélo à 7 h 40. Quelle est la probabilité qu'il soit en retard au lycée ?
3. L'élève part à vélo. Avant quelle heure doit-il partir pour arriver à l'heure au lycée avec une probabilité de 0,9 ? Arrondir le résultat à la minute près.

Partie C : le bus

Lorsque l'élève utilise le bus, on modélise son temps de parcours, exprimé en minutes, entre son domicile et son lycée par une variable aléatoire T' qui suit la loi normale d'espérance $\mu' = 15$ et d'écart-type σ'.
On sait que la probabilité qu'il mette plus de 20 minutes pour se rendre à son lycée en bus est de 0,05.
On note Z' la variable aléatoire égale à $\dfrac{T' - 15}{\sigma'}$

1. Quelle loi la variable aléatoire Z' suit-elle ?
2. Déterminer une valeur approchée à 0,01 près de l'écart-type σ' de la variable aléatoire T'.

*

EXERCICE 2 **5 points**

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x - y + 3z + 1 = 0$
et la droite $\mathcal{D}$ dont une représentation paramétrique est
$\left\{\begin{array}{l} x = 2t \\ y = 1 + t \quad , \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -5 + 3t \end{array}\right.$
On donne les points $A(1\ ;\ 1;\ 0)$, $B(3\ ;0\ ;\ -1)$ et $C(7\ ;1\ ;\ -2)$

Proposition 1 :

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est $\left\{\begin{array}{l} x = 5 - 2t \\ y = -1 + t \quad , \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -2 + t \end{array}\right.$

Proposition 2 :
Les droites $\mathcal{D}$ et (AB) sont orthogonales.

Proposition 3 :
Les droites $\mathcal{D}$ et (AB) sont coplanaires.

Proposition 4 :
La droite $\mathcal{D}$ coupe le plan $\mathcal{P}$ au point E de coordonnées $(8;\ -3;\ -4)$.

Proposition 5 :
Les plans $\mathcal{P}$ et (ABC) sont parallèles.
*

EXERCICE 3 **5 points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

Partie A

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0;~+\infty[$.
   Pour tout réel x de l'intervalle $[0~;~+\infty[$, calculer $f'(x)$. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Quelle interprétation graphique peut-on faire de ce résultat ?

Partie B

Soit $\mathscr{A}$ la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ de la façon suivante : pour tout réel t de l'intervalle $[0~;~+\infty[$, $\mathscr{A}(t)$ est l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = t$.

1. Déterminer le sens de variation de la fonction $\mathscr{A}$.
2. On admet que l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses est égale à 1 unité d'aire. Que peut-on en déduire pour la fonction $\mathscr{A}$?
3. On cherche à prouver l'existence d'un nombre réel α tel que la droite d'équation $x = \alpha$ partage le domaine compris entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$, en deux parties de même aire, et à trouver une valeur approchée de ce réel.
   a. Démontrer que l'équation $\mathscr{A}(t) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$
   b. Sur le graphique fourni en **annexe (*à rendre avec la copie*)** sont tracées la courbe $\mathscr{C}$, ainsi que la courbe Γ représentant la fonction $\mathscr{A}$.
   Sur le graphique de l'**annexe**, identifier les courbes $\mathscr{C}$ et Γ, puis tracer la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$. En déduire une valeur approchée du réel α.
   Hachurer le domaine correspondant à $\mathscr{A}(\alpha)$.
4. On définit la fonction g sur l'intervalle $[0;~+\infty[$ par

$$g(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

   a. On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
   Pour tout réel x de l'intervalle $[0~;~+\infty[$, calculer $g'(x)$.
   b. En déduire, pour tout réel t de l'intervalle $[0~;~+\infty[$, une expression de $\mathscr{A}(t)$.
   c. Calculer une valeur approchée à 10^{-2} près de $\mathscr{A}(6)$.

*

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par $z_0 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ et pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1} = (1 + \mathrm{i})z_n.$$

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.

1. Calculer u_0.
2. Démontrer que (u_n) est la suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 2.
3. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n).
5. Étant donné un réel positif p, on souhaite déterminer, à l'aide d'un algorithme, la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que $u_n > p$.

   Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions de traitement et de sortie, de façon à afficher la valeur cherchée de l'entier n.

Variables	:	u est un réel p est un réel n est un entier
Initialisation	:	Affecter à n la valeur 0 Affecter à u la valeur 2
Entrée	:	Demander la valeur de p
Traitement	:	
Sortie	:	

Partie B

1. Déterminer la forme algébrique de z_1.
2. Déterminer la forme exponentielle de z_0 et de $1 + \mathrm{i}$.

   En déduire la forme exponentielle de z_1.
3. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

*

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un laboratoire étudie la propagation d'une maladie sur une population.
Un *individu sain* est un individu n'ayant jamais été touché par la maladie.
Un *individu malade* est un individu qui a été touché par la maladie et non guéri.
Un *individu guéri* est un individu qui a été touché par la maladie et qui a guéri.
Une fois guéri, un individu est immunisé et ne peut plus tomber malade.
Les premières observations nous montrent que, d'un jour au jour suivant :

- 5 % des individus tombent malades ;
- 20 % des individus guérissent.

Pour tout entier naturel n, on note a_n la proportion d'individus sains n jours après le début de l'expérience, b_n la proportion d'individus malades n jours après le début de l'expérience, et c_n celle d'individus guéris n jours après le début de l'expérience.
On suppose qu'au début de l'expérience, tous les individus sont sains, c'est à dire que $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 0$

1. Calculer a_1, b_1 et c_1.

2. **a.** Quelle est la proportion d'individus sains qui restent sains d'un jour au jour suivant ? En déduire a_{n+1} en fonction de a_n.

b. Exprimer b_{n+1} en fonction de a_n et de b_n.

On admet que $c_{n+1} = 0{,}2b_n + c_n$.

Pour tout entier naturel n, on définit $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

On définit les matrices $A = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On admet qu'il existe une matrice inversible P telle que $D = P^{-1} \times A \times P$ et que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$.

3. **a.** Vérifier que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = A \times U_n$.

On admet que, pour tout entier naturel n, $U_n = A^n \times U_0$.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul,

$$D^n = \begin{pmatrix} 0{,}95^n & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On admet que $A^n = \begin{pmatrix} 0{,}95^n & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{3}\left(0{,}95^n - 0{,}8^n\right) & 0{,}8^n & 0 \\ \dfrac{1}{3}\left(3 - 4 \times 0{,}95^n + 0{,}8^n\right) & 1 - 0{,}8^n & 1 \end{pmatrix}$

4. **a.** Vérifier que pour tout entier naturel n, $b_n = \dfrac{1}{3}\left(0{,}95^n - 0{,}8^n\right)$

b. Déterminer la limite de la suite (b_n).

c. On admet que la proportion d'individus malades croît pendant plusieurs jours, puis décroit.

On souhaite déterminer le pic épidémique, c'est à dire le moment où la proportion d'individus malades est à son maximum.

À cet effet, on utilise l'algorithme donné en **annexe 2 (*à rendre avec la copie*)**, dans lequel on compare les termes successifs de la suite (b_n).

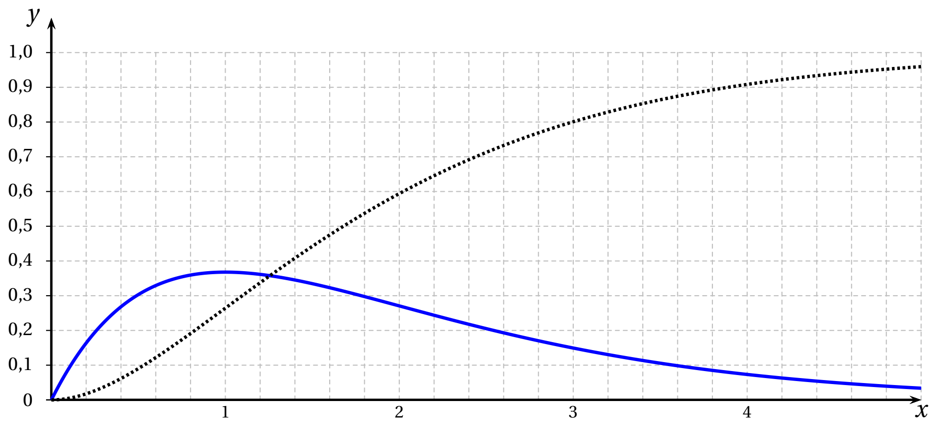
Compléter l'algorithme de façon qu'il affiche le rang du jour où le pic épidémique est atteint et compléter le tableau fourni en **annexe 2**.

Conclure.

*

Annexe 1
À rendre avec la copie

EXERCICE 3
Représentations graphiques des fonctions f et $\mathscr{A}$



Annexe 2
À rendre avec la copie

EXERCICE 4
Algorithme et tableau à compléter

Variables	:	$b,\ b',\ x,\ y$ sont des réels
		k est un entier naturel
Initialisation	:	Affecter à b la valeur 0
		Affecter à b' la valeur 0,05
		Affecter à k la valeur 0
		Affecter à x la valeur 0,95
		Affecter à y la valeur 0,8
Traitement	:	Tant que $b < b'$ faire :
		Affecter à k la valeur $k+1$
		Affecter à b la valeur b'
		Affecter à x la valeur $0,95x$
		Affecter à y la valeur $0,80y$
		Affecter à b' la valeur $\cdots\cdots$
		Fin Tant que
Sortie	:	Afficher $\cdots\cdots$

	k	b	x	y	b'	Test : $b < b'$?
Après le 7e passage dans la boucle Tant que	7	0,1628	0,6634	0,1678	0,1652	VRAI
Après le 8e passage éventuel dans la boucle Tant que						
Après le 9e passage éventuel dans la boucle Tant que						

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Amérique du Nord 30 mai 2014

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, tous les résultats demandés seront arrondis à 10^{-3} près.

Une grande enseigne de cosmétiques lance une nouvelle crème hydratante.

Partie A : Conditionnement des pots

Cette enseigne souhaite vendre la nouvelle crème sous un conditionnement de 50 mL et dispose pour ceci de pots de contenance maximale 55 mL.
On dit qu'un pot de crème est non conforme s'il contient moins de 49 mL de crème.

1. Plusieurs séries de tests conduisent à modéliser la quantité de crème, exprimée en mL, contenue dans chaque pot par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart-type $\sigma = 1,2$.
   Calculer la probabilité qu'un pot de crème soit non conforme.
2. La proportion de pots de crème non conformes est jugée trop importante. En modifiant la viscosité de la crème, on peut changer la valeur de l'écart-type de la variable aléatoire X, sans modifier son espérance $\mu = 50$. On veut réduire à 0,06 la probabilité qu'un pot choisi au hasard soit non conforme.
   On note σ' le nouvel écart-type, et Z la variable aléatoire égale à $\dfrac{X-50}{\sigma'}$
   a. Préciser la loi que suit la variable aléatoire Z.
   b. Déterminer une valeur approchée du réel u tel que $p(Z \leqslant u) = 0,06$.
   c. En déduire la valeur attendue de σ'.
3. Une boutique commande à son fournisseur 50 pots de cette nouvelle crème.
   On considère que le travail sur la viscosité de la crème a permis d'atteindre l'objectif fixé et donc que la proportion de pots non conformes dans l'échantillon est 0,06.
   Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de pots non conformes parmi les 50 pots reçus.
   a. On admet que Y suit une loi binomiale. En donner les paramètres.
   b. Calculer la probabilité que la boutique reçoive deux pots non conformes ou moins de deux pots non conformes.

Partie B : Campagne publicitaire

Une association de consommateurs décide d'estimer la proportion de personnes satisfaites par l'utilisation de cette crème.
Elle réalise un sondage parmi les personnes utilisant ce produit. Sur 140 personnes interrogées, 99 se déclarent satisfaites.
Estimer, par intervalle de confiance au seuil de 95 %, la proportion de personnes satisfaites parmi les utilisateurs de la crème.
*

Exercice 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 5\mathrm{e}^{-x} - 3\mathrm{e}^{-2x} + x - 3.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f et $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x - 3$ dans un repère orthogonal du plan.

Partie A : Positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = f(x) - (x - 3)$.

1. Justifier que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, $g(x) > 0$.
2. La courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $\mathscr{D}$ ont-elles un point commun ? Justifier.

Partie B : Étude de la fonction g

On note M le point d'abscisse x de la courbe $\mathscr{C}_f$, N le point d'abscisse x de la droite $\mathscr{D}$ et on s'intéresse à l'évolution de la distance MN.

1. Justifier que, pour tout x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, la distance MN est égale à $g(x)$.
2. On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   Pour tout x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, calculer $g'(x)$.
3. Montrer que la fonction g possède un maximum sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ que l'on déterminera.
   En donner une interprétation graphique.

Partie C : Étude d'une aire

On considère la fonction $\mathscr{A}$ définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$\mathscr{A}(x) = \int_0^x [f(t) - (t - 3)]\,\mathrm{d}t.$$

1. Hachurer sur le graphique donné en **annexe 1 (à rendre avec la copie)** le domaine dont l'aire est donnée par $\mathscr{A}(2)$.
2. Justifier que la fonction $\mathscr{A}$ est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
3. Pour tout réel x strictement positif, calculer $\mathscr{A}(x)$.
4. Existe-t-il une valeur de x telle que $\mathscr{A}(x) = 2$?

*

Exercice 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

On considère un cube ABCDEFCH donné en annexe 2 (à rendre avec la copie).
On note M le milieu du segment [EH], N celui de [FC] et P le point tel que $\overrightarrow{\mathrm{HP}} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{HG}}$.

Partie A : Section du cube par le plan (MNP)

1. Justifier que les droites (MP) et (FG) sont sécantes en un point L.
   Construire le point L

2. On admet que les droites (LN) et (CG) sont sécantes et on note T leur point d'intersection.
   On admet que les droites (LN) et (BF) sont sécantes et on note Q leur point d'intersection.
   a. Construire les points T et Q en laissant apparents les traits de construction.
   b. Construire l'intersection des plans (MNP) et (ABF).
3. En déduire une construction de la section du cube par le plan (MNP).

Partie B

L'espace est rapporté au repère $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Donner les coordonnées des points M, N et P dans ce repère.
2. Déterminer les coordonnées du point L.
3. On admet que le point T a pour coordonnées $\left(1 ; 1 ; \frac{5}{8}\right)$.
   Le triangle TPN est-il rectangle en T ?

Exercice 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un volume constant de 2 200 m^3 d'eau est réparti entre deux bassins A et B.
Le bassin A refroidit une machine. Pour des raisons d'équilibre thermique on crée un courant d'eau entre les deux bassins à l'aide de pompes.
On modélise les échanges entre les deux bassins de la façon suivante :

- au départ, le bassin A contient 800 m^3 d'eau et le bassin B contient 1 400 m^3 d'eau ;
- tous les jours, 15 % du volume d'eau présent dans le bassin B au début de la journée est transféré vers le bassin A ;
- tous les jours, 10 % du volume d'eau présent dans le bassin A au début de la journée est transféré vers le bassin B.

Pour tout entier naturel n, on note :

- a_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin A à la fin du n-ième jour de fonctionnement ;
- b_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin B à la fin du n-ième jour de fonctionnement.

On a donc $a_0 = 800$ et $b_0 = 1400$.

1. Par quelle relation entre a_n et b_n traduit-on la conservation du volume total d'eau du circuit ?
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \dfrac{3}{4}a_n + 330$.
3. L'algorithme ci-dessous permet de déterminer la plus petite valeur de n à partir de laquelle a_n est supérieur ou égal à 1 100.
   Recopier cet algorithme en complétant les parties manquantes.

Variables	:	n est un entier naturel
		a est un réel
Initialisation	:	Affecter à n la valeur 0
		Affecter à a la valeur 800
Traitement	:	Tant que $a < 1100$, faire :
		Affecter à a la valeur …
		Affecter à n la valeur …
		Fin Tant que
Sortie	:	Afficher n

4. Pour tout entier naturel n, on note $u_n = a_n - 1320$.
   a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b. Exprimer u_n en fonction de n.
   En déduire que, pour tout entier naturel n, $a_n = 1320 - 520 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.
5. On cherche à savoir si, un jour donné, les deux bassins peuvent avoir, au mètre cube près, le même volume d'eau.
   Proposer une méthode pour répondre à ce questionnement.

*

Exercice 4 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un volume constant de 2 200 m^3 d'eau est réparti entre deux bassins A et B.
Le bassin A refroidit une machine. Pour des raisons d'équilibre thermique on crée un courant d'eau entre les deux bassins à l'aide de deux pompes.
On modélise les échanges entre les deux bassins de la façon suivante :

- au départ, le bassin A contient 1 100 m^3 d'eau et le bassin B contient 1 100 m^3 d'eau ;
- tous les jours, 15 % du volume d'eau présent en début de journée dans le bassin B est transféré vers le bassin A ;
- tous les jours, 10 % du volume d'eau présent en début de journée dans le bassin du bassin A est transféré vers le bassin B, et pour des raisons de maintenance, on transfère également 5 m^3 du bassin A vers le bassin B.

Pour tout entier naturel n, on note :

- a_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin A à la fin du n-ième jour de fonctionnement ;
- b_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin B à la fin du n-ième jour de fonctionnement.

On a donc $a_0 = 1100$ et $b_0 = 1100$.
Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante

Partie A

1. Traduire la conservation du volume total d'eau du circuit par une relation liant a_n et b_n.
2. On utilise un tableur pour visualiser l'évolution du volume d'eau dans les bassins.
   Donner les formules à écrire et à recopier vers le bas dans les cellules B3 et C3 permettant d'obtenir la feuille de calcul ci-dessous :

	A	B	C
1	Jour n	Volume bassin A	Volume bassin B
2	0	1100,00	1100,00
3	1		
4	2	1 187,50	1 012,50
5	3	1 215,63	984,38
6	4	1 236,72	963,28
7	5	1 252,54	947,46
8	6	1 264,40	935,60
9	7	1 273,30	926,10
10	8	1 279,98	920,02
11	9	1 234,98	915,02
12	10	1 288,74	911,26
13	11	1 291,55	908,45
14	12	1 293,66	906,34
15	13	1 295,25	904,75
16	14	1 296,44	903,56
17	15	1 297,33	902,67
18	16	1 298,00	902,00
19	17	1 298,50	901,50
20	18	1 298,87	901,13

3. Quelles conjectures peut-on faire sur l'évolution du volume d'eau dans chacun des bassins ?

Partie B

On considère la matrice carrée $M = \begin{pmatrix}0,9 & 0,15\\0,1 & 0,85\end{pmatrix}$ et les matrices colonnes $R = \begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}$.

On admet que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = MX_n + R$.

1. On note $S = \begin{pmatrix}1\,300\\900\end{pmatrix}$.

Vérifier que $S = MS + R$.

En déduire que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} - S = M(X_n - S)$.

Dans la suite, on admettra que, pour tout entier naturel n, $X_n - S = M^n(X_0 - S)$ et que $M^n = \begin{pmatrix}0,6+0,4\times 0,75^n & 0,6-0,6\times 0,75^n\\0,4-0,4\times 0,75^n & 0,4+0,6\times 0,75^n\end{pmatrix}$.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $X_n = \begin{pmatrix}1\,300-200\times 0,75^n\\900+200\times 0,75^n\end{pmatrix}$.

3. Valider ou invalider les conjectures effectuées à la question 3. de la partie A.

4. On considère que le processus est stabilisé lorsque l'entier naturel n vérifie

$$1\,300 - a_n < 1,5 \quad \text{et} \quad b_n - 900 < 1,5.$$

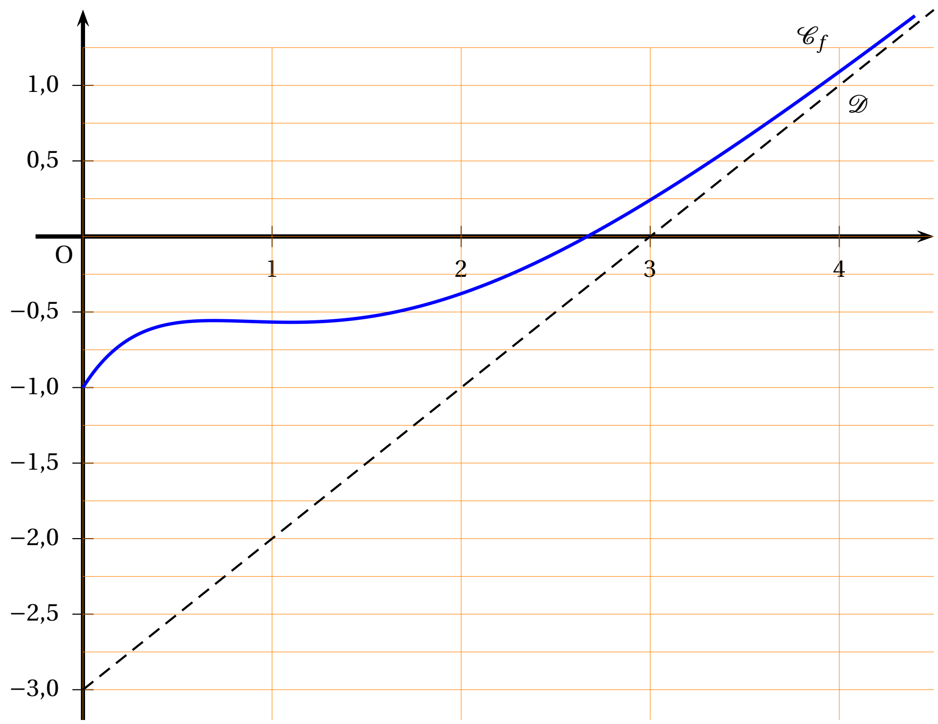
Déterminer le premier jour pour lequel le processus est stabilisé.

*

Annexe 1

À rendre avec la copie

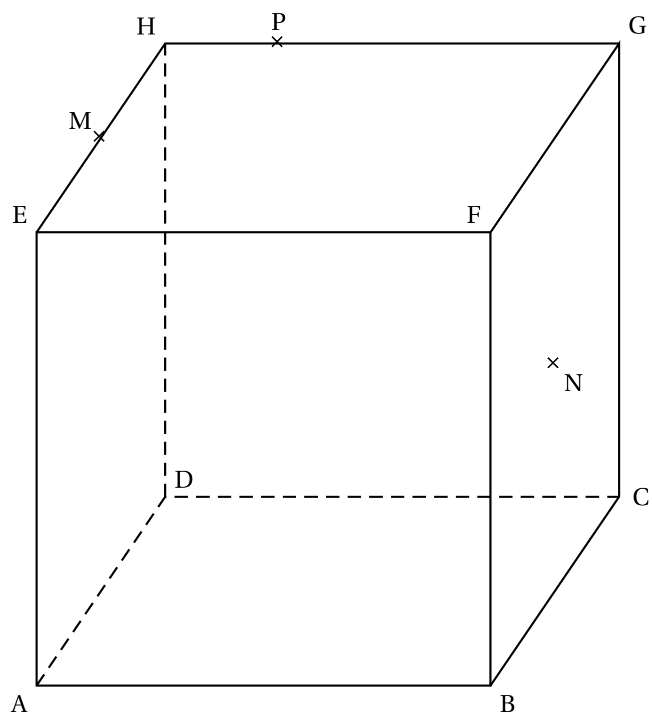
EXERCICE 2



Annexe 2

À rendre avec la copie

EXERCICE 3



Durée : 4 heures

Baccalauréat S Centres étrangers 12 juin 2014

Dans l'ensemble du sujet, et pour chaque question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Exercice 1 4 points

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples comportant quatre questions indépendantes.
Pour chaque question, une seule des quatre affirmations proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à l'affirmation exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point ; une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Question 1
Dans un hypermarché, 75 % des clients sont des femmes. Une femme sur cinq achète un article au rayon bricolage, alors que sept hommes sur dix le font.
Une personne, choisie au hasard, a fait un achat au rayon bricolage. La probabilité que cette personne soit une femme a pour valeur arrondie au millième :

a. 0,750 **b.** 0,150 **c.** 0,462 **d.** 0,700

Question 2
Dans cet hypermarché, un modèle d'ordinateur est en promotion. Une étude statistique a permis d'établir que, chaque fois qu'un client s'intéresse à ce modèle, la probabilité qu'il l'achète est égale à $0,3$. On considère un échantillon aléatoire de dix clients qui se sont intéressés à ce modèle.
La probabilité qu'exactement trois d'entre eux aient acheté un ordinateur de ce modèle a pour valeur arrondie au millième :

a. 0,900 **b.** 0,092 **c.** 0,002 **d.** 0,267

Question 3
Cet hypermarché vend des téléviseurs dont la durée de vie, exprimée en année, peut être modélisée par une variable aléatoire réelle qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. La durée de vie moyenne d'un téléviseur est de huit ans, ce qui se traduit par : $\lambda = \dfrac{1}{8}$.
La probabilité qu'un téléviseur pris au hasard fonctionne encore au bout de six ans a pour valeur arrondie au millième :

a. 0,750 **b.** 0,250 **c.** 0,472 **d.** 0,528

Question 4
Cet hypermarché vend des baguettes de pain dont la masse, exprimée en gramme, est une variable aléatoire réelle qui suit une loi normale de moyenne 200 g.
La probabilité que la masse d'une baguette soit comprise entre 184 g et 216 g est égale à $0,954$.
La probabilité qu'une baguette prise au hasard ait une masse inférieure à 192 g a pour valeur arrondie au centième :

a. 0,16 **b.** 0,32 **c.** 0,84 **d.** 0,48

*

Exercice 2 4 points

Commun à tous les candidats

On définit, pour tout entier naturel n, les nombres complexes z par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} z_0 & = & 16 \\ z_{n+1} & = & \dfrac{1+\text{i}}{2}z_n, \text{ pour tout entier naturel } n. \end{array}\right.$$

On note r_n le module du nombre complexe z_n : $r_n = |z_n|$.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O, on considère les points A_n d'affixes z_n.

1. **a.** Calculer z_1, z_2 et z_3.
   b. Placer les points A_1 et A_2 sur le graphique de l'**annexe, à rendre avec la copie**.
   c. Écrire le nombre complexe $\dfrac{1+\text{i}}{2}$ sous forme trigonométrique.
   d. Démontrer que le triangle OA_0A_1 est isocèle rectangle en A_1.
2. Démontrer que la suite (r_n) est géométrique, de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   La suite (r_n) est-elle convergente ?
   Interpréter géométriquement le résultat précédent.
   On note L_n la longueur de la ligne brisée qui relie le point A_0 au point A_n en passant successivement par les points A_1, A_2, A_3, etc.
   Ainsi $L_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} A_iA_{i+1} = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$.
3. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel n : $A_nA_{n+1} = r_{n+1}$.
   b. Donner une expression de L_n en fonction de n.
   c. Déterminer la limite éventuelle de la suite (L_n).

*

Exercice 3 7 points

Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes

Une image numérique en noir et blanc est composée de petits carrés (pixels) dont la couleur va du blanc au noir en passant par toutes les nuances de gris. Chaque nuance est codée par un réel x de la façon suivante :
r

- $x = 0$ pour le blanc ;
- $x = 1$ pour le noir ;
- $x = 0,01$; $x = 0,02$ et ainsi de suite jusqu'à $x = 0,99$ par pas de $0,01$ pour toutes les nuances intermédiaires (du clair au foncé).

L'image A, ci-après, est composée de quatre pixels et donne un échantillon de ces nuances avec leurs codes.
Un logiciel de retouche d'image utilise des fonctions numériques dites « fonctions de retouche ».
Une fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ est dite « fonction de retouche » si elle possède les quatre propriétés suivantes :

- $f(0) = 0$;
- $f(1) = 1$;
- f est continue sur l'intervalle $[0\,;\,1]$;
- f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

Une nuance codée x est dite assombrie par la fonction f si $f(x) > x$, et éclaircie, si $f(x) < x$.
Ainsi, si $f(x) = x^2$, un pixel de nuance codée $0,2$ prendra la nuance codée $0,2^2 = 0,04$. L'image A sera transformée en l'image B ci-dessous.
Si $f(x) = \sqrt{x}$, la nuance codée $0,2$ prendra la nuance codée $\sqrt{0,2} \approx 0,45$. L'image A sera transformée en l'image C ci-dessous.

0,20	0,40
0,60	0,80

Image A

0,04	0,16
0,36	0,64

Image B

0,45	0,63
0,77	0,89

Image C

Partie A

1. On considère la fonction f_1 définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x.$$

a. Démontrer que la fonction f_1 est une fonction de retouche.

b. Résoudre graphiquement l'inéquation $f_1(x) \leqslant x$, à l'aide du graphique donné en annexe, à rendre avec la copie, en faisant apparaître les pointillés utiles.

Interpréter ce résultat en termes d'éclaircissement ou d'assombrissement.

2. On considère la fonction f_2 définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$f_2(x) = \ln[1 + (\mathrm{e} - 1)x].$$

On admet que f_2 est une fonction de retouche.
On définit sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ la fonction g par : $g(x) = f_2(x) - x$.

a. Établir que, pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,1]$: $g'(x) = \dfrac{(\mathrm{e} - 2) - (\mathrm{e} - 1)x}{1 + (\mathrm{e} - 1)x}$;

b. Déterminer les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,1]$. Démontrer que la fonction g admet un maximum en $\dfrac{\mathrm{e} - 2}{\mathrm{e} - 1}$, maximum dont une valeur arrondie au centième est $0,12$.

c. Établir que l'équation $g(x) = 0,05$ admet sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ deux solutions α et β, avec $\alpha < \beta$.

On admettra que : $0,08 < \alpha < 0,09$ et que : $0,85 < \beta < 0,86$.

Partie B

On remarque qu'une modification de nuance n'est perceptible visuellement que si la valeur absolue de l'écart entre le code de la nuance initiale et le code de la nuance modifiée est supérieure ou égale à $0,05$.

1. Dans l'algorithme décrit ci-dessous, f désigne une fonction de retouche.
Quel est le rôle de cet algorithme ?

Variables :	x (nuance initiale)
	y (nuance retouchée)
	E (écart)
	c (compteur)
	k
Initialisation :	c prend la valeur 0
Traitement :	Pour k allant de 0 à 100, faire
	x prend la valeur $\frac{k}{100}$
	y prend la valeur $f(x)$
	E prend la valeur $\lvert y - x \rvert$
	Si $E \geqslant 0,05$, faire
	c prend la valeur $c + 1$
	Fin si
	Fin pour
Sortie :	Afficher c

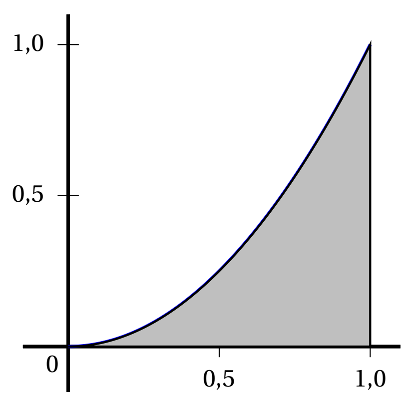
2. Quelle valeur affichera cet algorithme si on l'applique à la fonction f_2 définie dans la deuxième question de la **partie A** ?

Partie C

Dans cette partie, on s'intéresse à des fonctions de retouche f dont l'effet est d'éclaircir l'image dans sa globalité, c'est-a-dire telles que, pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 1]$, $f(x) \leqslant x$.

On décide de mesurer l'éclaircissement global de l'image en calculant l'aire $\mathscr{A}_f$ de la portion de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f, et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

Entre deux fonctions, celle qui aura pour effet d'éclaircir le plus l'image celle correspondant à la plus petite aire. On désire comparer l'effet des deux fonctions suivantes, dont on admet qu'elles sont des fonctions de retouche :



$$f_1(x) = x\mathrm{e}^{\left(x^2-1\right)} \qquad f_2(x) = 4x - 15 + \frac{60}{x+4}.$$

1. **a.** Calculer $\mathscr{A}_{f_1}$.
   b. Calculer $\mathscr{A}_{f_2}$
2. De ces deux fonctions, laquelle a pour effet d'éclaircir le plus l'image ?

*

Exercice 4 — 5 points

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points :

$$\mathrm{A}(1~;~2~;~7),\quad \mathrm{B}(2~;~0~;~2),\quad \mathrm{C}(3~;~1~;~3),\quad \mathrm{D}(3~;~-6~;~1) \text{ et } \mathrm{E}(4~;~-8~;~-4).$$

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Soit $\overrightarrow{u}(1~;~b~;~c)$ un vecteur de l'espace, où b et c désignent deux nombres réels.

a. Déterminer les valeurs de b et c telles que $\overrightarrow{u}$ soit un vecteur normal au plan (ABC).

b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :
$x - 2y + z - 4 = 0$.

c. Le point D appartient-il au plan (ABC) ?

3. On considère la droite $\mathcal{D}$ de l'espace dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x &=& 2t+3\\ y &=& -4t+5\\ z &=& 2t-1\end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ est un nombre réel.}$$

a. La droite $\mathcal{D}$ est-elle orthogonale au plan (ABC) ?

b. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan (ABC).

4. Étudier la position de la droite (DE) par rapport au plan (ABC).

Exercice 4 5 points

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Partie A : préliminaires

1. a. Soient n et N deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2, tels que :

$$n^2 \equiv N - 1 \quad \text{modulo } N.$$

Montrer que : $n \times n^3 \equiv 1 \quad \text{modulo } N$.

b. Déduire de la question précédente un entier k_1 tel que : $5k_1 \equiv 1 \quad \text{modulo} 26$.
On admettra que l'unique entier k tel que : $0 \leqslant k \leqslant 25$ et $5k \equiv 1 \quad \text{modulo} 26$ vaut 21.

2. On donne les matrices : $A = \begin{pmatrix} 4 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1\\ -3 & 4\end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1\\ y_2\end{pmatrix}$.

a. Calculer la matrice $6A - A^2$.

b. En déduire que A est inversible et que sa matrice inverse, notée A^{-1}, peut s'écrire sous la forme $A^{-1} = \alpha I + \beta A$, ou α et β sont deux réels que l'on déterminera.

c. Vérifier que : $B = 5A^{-1}$.

d. Démontrer que si $AX = Y$, alors $5X = BY$.

Partie B : procédure de codage

Coder le mot « ET », en utilisant la procédure de codage décrite ci-dessous.

- Le mot à coder est remplacé par la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix}$, où x_1 est l'entier représentant la première lettre du mot et x_2 l'entier représentant la deuxième, selon le tableau de correspondance ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

- La matrice X est transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que : $Y = AX$.
- La matrice Y est transformée en la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, où r_1 est le reste de la division euclidienne de y_1 par 26 et r_2 le reste de la division euclidienne de y_2 par 26.
- Les entiers r_1 et r_2 donnent les lettres du mot codé, selon le tableau de correspondance ci-dessus.

Exemple : « OU »(mot à coder) $\to X \begin{pmatrix} 14 \\ 20 \end{pmatrix} \to Y = \begin{pmatrix} 76 \\ 82 \end{pmatrix} \to R = \begin{pmatrix} 24 \\ 4 \end{pmatrix} \to$ « YE » (mot codé).

Partie C : procédure de décodage (on conserve les mêmes notations que pour le codage)

Lors du codage, la matrice X a été transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que : $Y = AX$.

1. Démontrer que : $\left\{\begin{array}{lcl} 5x_1 & = & 2y_1 - y_2 \\ 5x_2 & = & -3y_1 + 4y_2 \end{array}\right.$.
2. En utilisant la question 1. b. de la **partie A**, établir que :

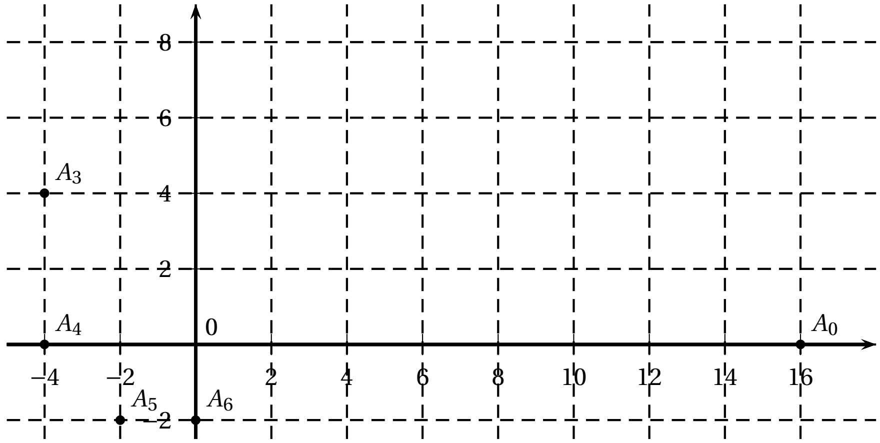
$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & \equiv & 16y_1 + 5y_2 \\ x_2 & \equiv & 15y_1 + 6y_2 \end{array}\right. \quad \text{modulo } 26$$

3. Décoder le mot « QP ».

*

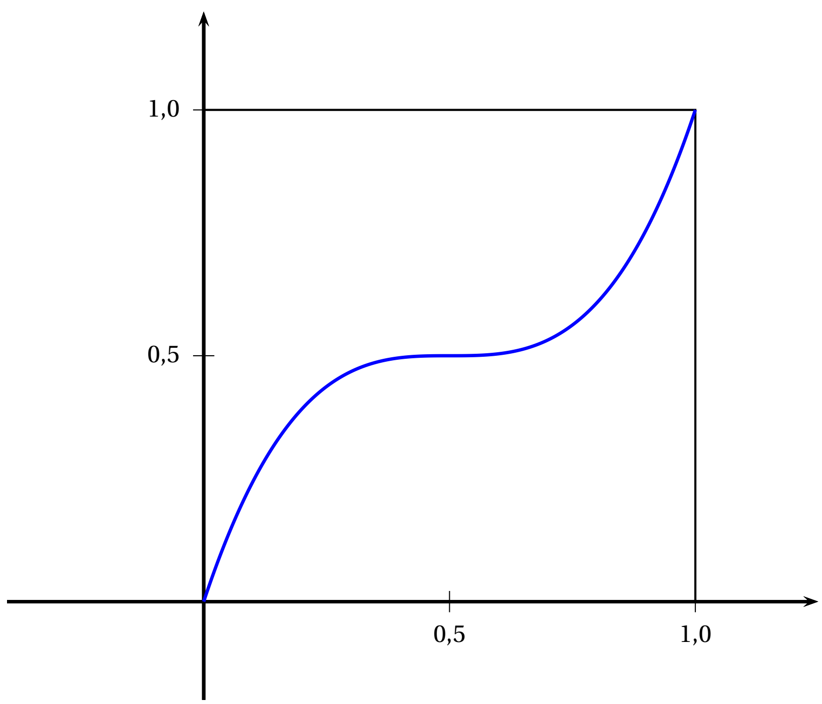
A4 **Annexe à rendre avec la copie**

Annexe relative à l'exercice 2



Annexe relative à l'exercice 3

Courbe représentative de la fonction f_1



∽ Baccalauréat S Polynésie ∾
13 juin 2014

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points

$$A(5\ ;\ -5\ ;\ 2), B(-1\ ;\ 1\ ;\ 0), C(0\ ;\ 1\ ;\ 2) \quad \text{et } D(6\ ;\ 6\ ;\ -1).$$

1. Déterminer la nature du triangle BCD et calculer son aire.

2. **a.** Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD).

b. Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ orthogonale au plan (BCD) et passant par le point A.

4. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan (BCD).

5. Déterminer le volume du tétraèdre ABCD.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}\mathcal{B} \times h$, *où* $\mathcal{B}$ *est l'aire d'une base du tétraèdre et* h *la hauteur correspondante.*

6. On admet que $AB = \sqrt{76}$ et $AC = \sqrt{61}$.

Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle $\widehat{BAC}$.

*

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = u_n + 2n + 2.$$

1. Calculer u_1 et u_2.

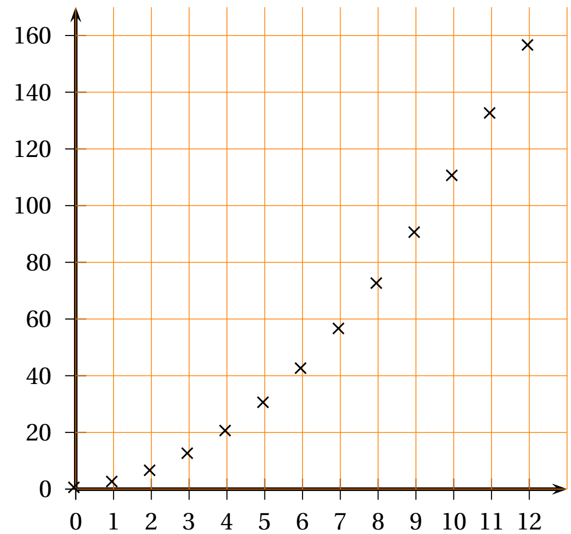
2. On considère les deux algorithmes suivants :

Algorithme 1		**Algorithme 2**	
Variables :	n est un entier naturel	**Variables :**	n est un entier naturel
	u est un réel		u est un réel
Entrée :	Saisir la valeur de n	**Entrée :**	Saisir la valeur de n
Traitement :	u prend la valeur 0	**Traitement :**	u prend la valeur 0
	Pour i allant de 1 à n :		Pour i allant de 0 à $n-1$:
	u prend la valeur $u+2i+2$		u prend la valeur $u+2i+2$
	Fin Pour		Fin Pour
Sortie :	Afficher u	**Sortie :**	Afficher u

De ces deux algorithmes, lequel permet d'afficher en sortie la valeur de u_n, la valeur de l'entier naturel n étant entrée par l'utilisateur ?

3. À l'aide de l'algorithme, on a obtenu le tableau et le nuage de points ci-dessous où n figure en abscisse et u_n en ordonnée.

n	u_n
0	0
1	2
2	6
3	12
4	20
5	30
6	42
7	56
8	72
9	90
10	110
11	132
12	156



a. Quelle conjecture peut-on faire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?

Démontrer cette conjecture.

b. La forme parabolique du nuage de points amène à conjecturer l'existence de trois réels a, b et c tels que, pour tout entier naturel n, $u_n = an^2+bn+c$.

Dans le cadre de cette conjecture, trouver les valeurs de a, b et c à l'aide des informations fournies.

4. On définit, pour tout entier naturel n, la suite (v_n) par : $v_n = u_{n+1} - u_n$.

a. Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

b. On définit, pour tout entier naturel n, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

Démontrer que, pour tout entier naturel n, $S_n = (n+1)(n+2)$.

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $S_n = u_{n+1} - u_0$, puis exprimer u_n en fonction de n.

*

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans cet exercice, on appelle numéro du jour de naissance le rang de ce jour dans le mois et numéro du mois de naissance, le rang du mois dans l'année.
Par exemple, pour une personne née le 14 mai, le numéro du jour de naissance est 14 et le numéro du mois de naissance est 5.

Partie A

Lors d'une représentation, un magicien demande aux spectateurs d'effectuer le programme de calcul (A) suivant :
« Prenez le numéro de votre jour de naissance et multipliez-le par 12. Prenez le numéro de votre mois de naissance et multipliez-le par 37. Ajoutez les deux nombres obtenus. Je pourrai alors vous donner la date de votre anniversaire ».
Un spectateur annonce 308 et en quelques secondes, le magicien déclare : « Votre anniversaire tombe le 1$^{\text{er}}$ août ! ».

1. Vérifier que pour une personne née le 1er août, le programme de calcul (A) donne effectivement le nombre 308.
2. **a.** Pour un spectateur donné, on note j le numéro de son jour de naissance, m celui de son mois de naissance et z le résultat obtenu en appliquant le programme de calcul (A).

   Exprimer z en fonction de j et de m et démontrer que z et m sont congrus modulo 12.

   b. Retrouver alors la date de l'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 474 en appliquant le programme de calcul (A).

Partie B

Lors d'une autre représentation, le magicien décide de changer son programme de calcul. Pour un spectateur dont le numéro du jour de naissance est j et le numéro du mois de naissance est m, le magicien demande de calculer le nombre z défini par $z = 12j + 31m$.

Dans les questions suivantes, on étudie différentes méthodes permettant de retrouver la date d'anniversaire du spectateur.

1. Première méthode :

   On considère l'algorithme suivant :

Variables :	j et m sont des entiers naturels
Traitement :	Pour m allant de 1 à 12 faire :
	Pour j allant de 1 à 31 faire :
	z prend la valeur $12j + 31m$
	Afficher z
	Fin Pour
	Fin Pour

   Modifier cet algorithme afin qu'il affiche toutes les valeurs de j et de m telles que $12j + 31m = 503$.

2. Deuxième méthode :

   a. Démontrer que $7m$ et z ont le même reste dans la division euclidienne par 12.

   b. Pour m variant de 1 à 12, donner le reste de la division euclidienne de $7m$ par 12.

   c. En déduire la date de l'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 503 avec le programme de calcul (B).

3. Troisième méthode :

   a. Démontrer que le couple $(-2\ ;\ 17)$ est solution de l'équation $12x + 31y = 503$.

   b. En déduire que si un couple d'entiers relatifs $(x\ ;\ y)$ est solution de l'équation $12x + 31y = 503$, alors $12(x + 2) = 31(17 - y)$.

   c. Déterminer l'ensemble de tous les couples d'entiers relatifs $(x\ ;\ y)$, solutions de l'équation $12x + 31y = 503$.

   d. Démontrer qu'il existe un unique couple d'entiers relatifs $(x\ ;\ y)$ tel que $1 \leqslant y \leqslant 12$.

   En déduire la date d'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 503 avec le programme de calcul (B).

*

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. Zoé se rend à son travail à pied ou en voiture. Là où elle habite, il pleut un jour sur quatre.

   Lorsqu'il pleut, Zoé se rend en voiture à son travail dans 80 % des cas.

   Lorsqu'il ne pleut pas, elle se rend à pied à son travail avec une probabilité égale à 0,6.

   Affirmation n^o^ 1 :

   « Zoé utilise la voiture un jour sur deux. »

2. Dans l'ensemble E des issues d'une expérience aléatoire, on considère deux évènements A et B.

   Affirmation n^o^ 2 :

   « Si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ sont aussi indépendants. »

3. On modélise le temps d'attente, exprimé en minutes, à un guichet, par une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,7.

   Affirmation n^o^ 3 :

   « La probabilité qu'un client attende au moins cinq minutes à ce guichet est 0,7 environ. »

   Affirmation n^o^ 4 :

   « Le temps d'attente moyen à ce guichet est de sept minutes. »

4. On sait que 39 % de la population française est du groupe sanguin A+.

   On cherche à savoir si cette proportion est la même parmi les donneurs de sang.

   On interroge 183 donneurs de sang et parmi eux, 34 % sont du groupe sanguin A+.

   Affirmation n^o^ 5 :

   « On ne peut pas rejeter, au seuil de 5 %, l'hypothèse selon laquelle la proportion de personnes du groupe sanguin A+ parmi les donneurs de sang est de 39 % comme dans l'ensemble de la population. »

*

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{x} \quad \text{et} \quad g(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1.$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal.

1. Démontrer que les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont un point commun d'abscisse 0 et qu'en ce point, elles ont la même tangente Δ dont on déterminera une équation.

2. Étude de la position relative de la courbe $\mathcal{C}_g$ et de la droite Δ

   Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - x - 2$.

   a. Déterminer la limite de la fonction h en $-\infty$.

b. Justifier que, pour tout réel x, $h(x) = x\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} - 1 - \dfrac{2}{x}\right)$.

En déduire la limite de la fonction h en $+\infty$.

c. On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, calculer $h'(x)$ et étudier le signe de $h'(x)$ suivant les valeurs de x.

d. Dresser le tableau de variations de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

e. En déduire que, pour tout réel x, $2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1 \geqslant x + 1$.

f. Que peut-on en déduire quant à la position relative de la courbe $\mathscr{C}_g$ et de la droite Δ ?

3. Étude de la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$

a. Pour tout réel x, développer l'expression $\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2$.

b. Déterminer la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

4. Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

*

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Antilles-Guyane 19 juin 2014

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes

Les résultats seront arrondis à 10^{-4} *près*

Partie A

Un ostréiculteur élève deux espèces d'huîtres : « la plate » et « la japonaise ». Chaque année, les huîtres plates représentent 15 % de sa production.
Les huîtres sont dites de calibre n° 3 lorsque leur masse est comprise entre 66 g et 85 g.
Seulement 10 % des huîtres plates sont de calibre n° 3, alors que 80 % des huîtres japonaises le sont.

1. Le service sanitaire prélève une huître au hasard dans la production de l'ostréiculteur. On suppose que toutes les huitres ont la même chance d'être choisies.

On considère les évènements suivants :

- J : « l'huître prélevée est une huître japonaise »,
- C : « l'huître prélevée est de calibre n° 3 ».

a. Construire un arbre pondéré complet traduisant la situation.

b. Calculer la probabilité que l'huître prélevée soit une huître plate de calibre n° 3.

c. Justifier que la probabilité d'obtenir une huître de calibre n° 3 est $0,695$.

d. Le service sanitaire a prélevé une huître de calibre n° 3. Quelle est la probabilité que ce soit une huître plate ?

2. La masse d'une huître peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale de moyenne $\mu = 90$ et d'écart-type $\sigma = 2$.

a. Donner la probabilité que l'huître prélevée dans la production de l'ostréiculteur ait une masse comprise entre 87 g et 89 g.

b. Donner $P(X \geqslant 91)$.

Partie B

Cet ostréiculteur affirme que 60 % de ses huîtres ont une masse supérieure à 91 g.
Un restaurateur souhaiterait lui acheter une grande quantité d'huîtres mais il voudrait, auparavant, vérifier l'affirmation de l'ostréiculteur.

Le restaurateur achète auprès de cet ostréiculteur 10 douzaines d'huîtres qu'on considèrera comme un échantillon de 120 huîtres tirées au hasard. Sa production est suffisamment importante pour qu'on l'assimile à un tirage avec remise.
Il constate que 65 de ces huîtres ont une masse supérieure à 91 g.

1. Soit F la variable aléatoire qui à tout échantillon de 120 huîtres associe la fréquence de celles qui ont une masse supérieure à 91 g.

Après en avoir vérifié les conditions d'application, donner un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la variable aléatoire F.

2. Que peut penser le restaurateur de l'affirmation de l'ostréiculteur ? *

EXERCICE 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{\mathrm{e}^x}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

1. Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 1 - x + \mathrm{e}^x.$$

   Dresser, en le justifiant, le tableau donnant les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ (les limites de g aux bornes de son ensemble de définition ne sont pas attendues).
   En déduire le signe de $g(x)$.
2. Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$.
3. On appelle f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que, pour tout réel x,

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x}g(x).$$

4. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
5. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que $-1 < \alpha < 0$.
6. **a.** Démontrer que la droite T d'équation $y = 2x + 1$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   b. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite T.

Partie B

1. Soit H la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par

$$H(x) = (-x - 1)\mathrm{e}^{-x}.$$

   Démontrer que H est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction h définie par $h(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.
2. On note $\mathscr{D}$ le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite T et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.
   Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine $\mathscr{D}$.

*

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Pour chacune des quatre propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
On considère les points A(1 ; 2 ; 5), B(−1 ; 6 ; 4), C(7 ; −10 ; 8) et D(−1 ; 3 ; 4).

1. **Proposition 1 :** Les points A, B et C définissent un plan.
2. On admet que les points A, B et D définissent un plan.
   Proposition 2 : Une équation cartésienne du plan (ABD) est $x - 2z + 9 = 0$.
3. **Proposition 3 :** Une représentation paramétrique de la droite (AC) est

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& \frac{3}{2}t-5 \\ y &=& -3t+14 \qquad t\in\mathbb{R} \\ z &=& -\frac{3}{2}t+2 \end{array}\right.$$

4. Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne $2x - y + 5z + 7 = 0$ et $\mathscr{P}'$ le plan d'équation cartésienne $-3x - y + z + 5 = 0$.
   Proposition 4 : Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles.

*

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 &=& 2 \\ \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} &=& \frac{1}{5}u_n + 3\times 0,5^n. \end{array}\right.$$

1. **a.** Recopier et, à l'aide de la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite (u_n) approchées à 10^{-2} près :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2								

   b. D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n).

2. **a.** Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul on a

$$u_n \geqslant \frac{15}{4}\times 0,5^n.$$

   b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.
   c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

3. *On se propose, dans cette question de déterminer la limite de la suite* (u_n).
   Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 10\times 0,5^n$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$. On précisera le premier terme de la suite (v_n).
   b. En déduire, que pour tout entier naturel n,

$$u_n = -8\times\left(\frac{1}{5}\right)^n + 10\times 0,5^n.$$

   c. Déterminer la limite de la suite (u_n)

4. Recopier et compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant, afin qu'il affiche la plus petite valeur de n telle que $u_n \leqslant 0,01$.

Entrée :	n et u sont des nombres
Initialisation :	n prend la valeur 0
	u prend la valeur 2
Traitement :	Tant que ... (1)
	n prend la valeur ... (2)
	u prend la valeur ... (3)
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

*

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

En montagne, un randonneur a effectué des réservations dans deux types d'hébergements :
L'hébergement A et l'hébergement B.
Une nuit en hébergement A coûte 24 € et une nuit en hébergement B coûte 45 €.
Il se rappelle que le coût total de sa réservation est de 438€.
On souhaite retrouver les nombres x et y de nuitées passées respectivement en hébergement A et en hébergement B

1. **a.** Montrer que les nombres x et y sont respectivement inférieurs ou égaux à 18 et 9.

   b. Recopier et complèter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant afin qu'il affiche les couples $(x\,;\,y)$ possibles.

Entrée :	x et y sont des nombres
Traitement :	Pour x variant de 0 ... (1)
	Pour y variant de 0 ... (2)
	Si ... (3)
	Afficher x et y
	Fin Si
	Fin Pour
	Fin Pour
Fin traitement	

2. Justifier que le coût total de la réservation est un multiple de 3.
3. **a.** Justifier que l'équation $8x + 15y = 1$ admet pour solution au moins un couple d'entiers relatifs.

   b. Déterminer une telle solution.

   c. Résoudre l'équation (E) : $8x+15y = 146$ où x et y sont des nombres entiers relatifs.
4. Le randonneur se souvient avoir passé au maximum 13 nuits en hébergement A.

   Montrer alors qu'il peut retrouver le nombre exact de nuits passées en hébergement A et celui des nuits passées en hébergement B.

   Calculer ces nombres.

*

∽ Baccalauréat S Asie 19 juin 2014 ∾

Exercice 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples comportant quatre questions indépendantes.
Pour chaque question, une seule des quatre affirmations proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à l'affirmation exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point ; une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormal, on considère les points A(1 ; −1 ; −1), B(1 ; 1 ; 1), C(0 ; 3 ; 1) et le plan $\mathscr{P}$ d'équation $2x + y - z + 5 = 0$.

Question 1

Soit $\mathscr{D}_1$ la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(2~;~-1~;~1)$ passant par A.
Une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}_1$ est :

a. $\left\{\begin{array}{l c l}x&=&2+t\\y&=&-1-t\\z&=&1-t\end{array}\right.\quad(t\in\mathbb{R})$ **b.** $\left\{\begin{array}{l c l}x&=&-1+2t\\y&=&1-t\\z&=&1+t\end{array}\right.\quad(t\in\mathbb{R})$

c. $\left\{\begin{array}{l c l}x&=&5+4t\\y&=&-3-2t\\z&=&1+2t\end{array}\right.\quad(t\in\mathbb{R})$ **d.** $\left\{\begin{array}{l c l}x&=&4-2t\\y&=&-2+t\\z&=&3-4t\end{array}\right.\quad(t\in\mathbb{R})$

Question 2

Soit $\mathscr{D}_2$ la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l c l}x&=&1+t\\y&=&-3-t\\z&=&2-2t\end{array}\right.\quad(t\in\mathbb{R})$.

a. La droite $\mathscr{D}_2$ et le plan $\mathscr{P}$ ne sont pas sécants
b. La droite $\mathscr{D}_2$ est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.
c. La droite $\mathscr{D}_2$ et le plan $\mathscr{P}$ se coupent au point $\text{E}\left(\dfrac{1}{3}~;~-\dfrac{7}{3}~;~\dfrac{10}{3}\right)$.
d. La droite $\mathscr{D}_2$ et le plan $\mathscr{P}$ se coupent au point $\text{F}\left(\dfrac{4}{3}~;~-\dfrac{1}{3}~;~\dfrac{22}{3}\right)$.

Question 3

a. L'intersection du plan $\mathscr{P}$ et du plan (ABC) est réduite à un point.
b. Le plan $\mathscr{P}$ et le plan (ABC) sont confondus.
c. Le plan $\mathscr{P}$ coupe le plan (ABC) selon une droite.
d. Le plan $\mathscr{P}$ et le plan (ABC) sont strictement parallèles.

Question 4

Une mesure de l'angle $\widehat{\text{BAC}}$ arrondie au dixième de degré est égale à :

a. 22,2 ° **b.** 0,4 ° **c.** 67,8 ° **d.** 1,2 °

*

Exercice 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

Le taux d'hématocrite est le pourcentage du volume de globules rouges par rapport au volume total du sang. On note X la variable aléatoire donnant le taux d'hématocrite d'un adulte choisi au hasard dans la population française. On admet que cette variable suit une loi normale de moyenne $\mu = 45,5$ et d'écart-type σ.

Partie A

On note Z la variable aléatoire $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{X-45,5}{\sigma}$.

1. **a.** Quelle est la loi de la variable aléatoire Z ?

   b. Déterminer $P(X \leqslant \mu)$.
2. En prenant $\sigma = 3,8$, déterminer $P(37,9 \leqslant X \leqslant 53,1)$. Arrondir le résultat au centième.

Partie B

Une certaine maladie V est présente dans la population française avec la fréquence 1 %. On sait d'autre part que 30 % de la population française a plus de 50 ans, et que 90 % des porteurs de la maladie V dans la population française ont plus de 50 ans.

On choisit au hasard un individu dans la population française.
On note α l'unique réel tel que $P(X \leqslant \alpha) = 0,995$, où X est la variable aléatoire définie au début de l'exercice. On ne cherchera pas à calculer α.

On définit les évènements :

« l'individu est porteur de la maladie V » ;

« l'individu a plus de 50 ans » ;

« l'individu a un taux d'hématocrite supérieur à α ».

Ainsi $P(M) = 0,01$, $\quad P_M(S) = 0,9$ et $P(H) = P(X > \alpha)$.
D'autre part, une étude statistique a révélé que 60 % des individus ayant un taux d'hématocrite supérieur à α sont porteurs de la maladie V.

1. **a.** Déterminer $P(M \cap S)$.

   b. On choisit au hasard un individu ayant plus de 50 ans. Montrer que la probabilité qu'il soit porteur de la maladie V est égale à 0,03.
2. **a.** Calculer la probabilité $P(H)$.

   b. L'individu choisi au hasard a un taux d'hématocrite inférieur ou égal à α. Calculer la probabilité qu'il soit porteur de la maladie V. Arrondir au millième.

Partie C

Le but de cette partie est d'étudier l'influence d'un gène sur la maladie V.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de la maladie V dans les échantillons de taille 1 000, prélevés au hasard et avec remise dans l'ensemble de la population française. On arrondira les bornes de l'intervalle au millième.
2. Dans un échantillon aléatoire de 1 000 personnes possédant le gène, on a trouvé 14 personnes porteuses de la maladie V.

   Au regard de ce résultat, peut-on décider, au seuil de 95 %, que le gène a une influence sur la maladie ?

*

Exercice 3 **6 points**
Commun à tous les candidats

Une chaîne, suspendue entre deux points d'accroche de même hauteur peut être modélisée par la représentation graphique d'une fonction g définie sur $[-1\ ;\ 1]$ par

$$g(x) = \frac{1}{2a}\left(\mathrm{e}^{ax} + \mathrm{e}^{-ax}\right)$$

où a est un paramètre réel strictement positif. On ne cherchera pas à étudier la fonction g.

On montre en sciences physiques que, pour que cette chaîne ait une tension minimale aux extrémités, il faut et il suffit que le réel a soit une solution strictement positive de l'équation

$$(x-1)\mathrm{e}^{2x} - 1 - x = 0.$$

Dans la suite, on définit sur $[0~;~+\infty[$ la fonction f par $f(x) = (x-1)\mathrm{e}^{2x} - 1 - x$ pour tout réel $x \geqslant 0$.

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction f.
   Vérifier que $f'(0) = -2$ et que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$.
2. On note f'' la fonction dérivée de f'.
   Vérifier que, pour tout réel $x \geqslant 0$, $f''(x) = 4x\mathrm{e}^{2x}$.
3. Montrer que, sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ la fonction f' s'annule pour une unique valeur, notée x_0.
4. **a.** Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$, puis montrer que $f(x)$ est négatif pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0~;~x_0]$.

   b. Calculer $f(2)$.
   En déduire que sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$, la fonction f s'annule pour une unique valeur.
   Si l'on note a cette valeur, déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur de a arrondie au centième.
5. On admet sans démonstration que la longueur L de la chaîne est donnée par l'expression

$$L = \int_0^1 \left(\mathrm{e}^{ax} + \mathrm{e}^{-ax}\right)\,\mathrm{d}x.$$

   Calculer la longueur de la chaîne ayant une tension minimale aux extrémités, en prenant 1,2 comme valeur approchée du nombre a.

*

Exercice 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas choisi la spécialité mathématique

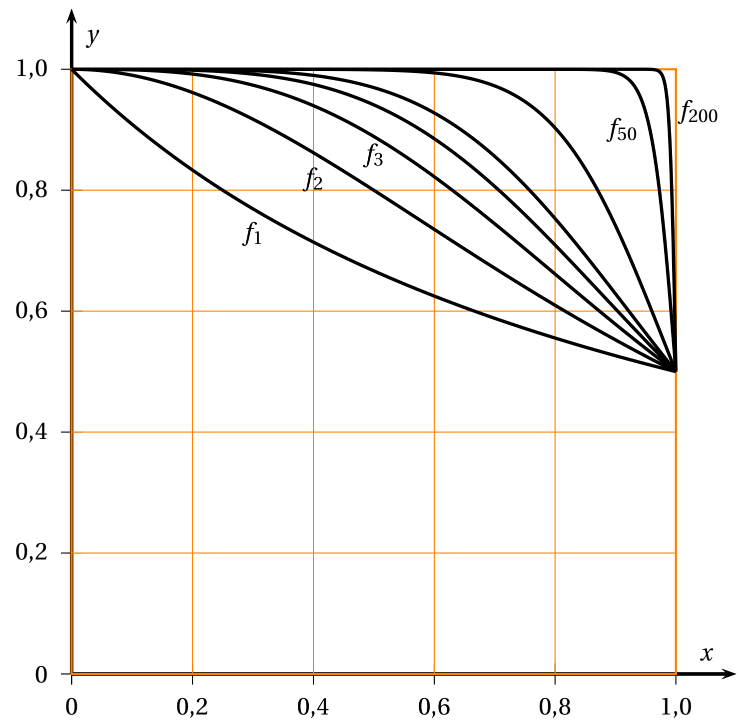
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On note f_n la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0~;~1]$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}.$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit le nombre I_n par

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x.$$

1. Les représentations graphiques de certaines fonctions f_n obtenues à l'aide d'un logiciel sont tracées ci-après.
   En expliquant soigneusement votre démarche, conjecturer, pour la suite (I_n) l'existence et la valeur éventuelle de la limite, lorsque n tend vers $+\infty$.



2. Calculer la valeur exacte de I_1.

3. **a.** Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$\frac{1}{1+x^n} \leqslant 1.$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $I_n \leqslant 1$.

4. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$1 - x^n \leqslant \frac{1}{1+x^n}.$$

5. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \left(1 - x^n\right)\,\mathrm{d}x$.

6. À l'aide des questions précédentes, démontrer que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.

7. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n, p et k sont des entiers naturels x et I sont des réels
Initialisation :	I prend la valeur 0
Traitement :	Demander un entier $n \geqslant 1$ Demander un entier $p \geqslant 1$ Pour k allant de 0 à $p-1$ faire : x prend la valeur $\dfrac{k}{p}$ I prend la valeur $I + \dfrac{1}{1+x^n} \times \dfrac{1}{p}$ Fin Pour Afficher I

a. Quelle valeur, arrondie au centième, renvoie cet algorithme si l'on entre les valeurs $n = 2$ et $p = 5$?

On justifiera la réponse en reproduisant et en complétant le tableau suivant avec les différentes valeurs prises par les variables, à chaque étape de l'algorithme. Les valeurs de I seront arrondies au millième.

k	x	I
0		
4		

b. Expliquer pourquoi cet algorithme permet d'approcher l'intégrale I_n.

*

Exercice 4 **5 points**
Candidats ayant choisi la spécialité mathématique

Partie A

Le but de celle partie est de démontrer que l'ensemble des nombres premiers est infini en raisonnant par l'absurde.

1. On suppose qu'il existe un nombre fini de nombres premiers notés $p_1, p_2, \dots, p_n$.
On considère le nombre E produit de tous les nombres premiers augmenté de 1 :

$$E = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n + 1.$$

Démontrer que E est un entier supérieur ou égal à 2, et que E est premier avec chacun des nombres $p_1, p_2, \dots, p_n$.

2. En utilisant le fait que E admet un diviseur premier conclure.

Partie B

Pour tout entier naturel $k \geqslant 2$, on pose $M_k = 2^k - 1$.
On dit que M_k est le k-ième nombre de Mersenne.

1. **a.** Reproduire et compléter le tableau suivant, qui donne quelques valeurs de M_k :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M_k	3								

   b. D'après le tableau précédent, si k est un nombre premier, peut-on conjecturer que le nombre M_k est premier ?

2. Soient p et q deux entiers naturels non nuls.

   a. Justifier l'égalité : $1+2^p++\left(2^p\right)^2+\left(2^p\right)^3+\cdots\left(2^p\right)^{q-1}=\dfrac{\left(2^p\right)^q-1}{2^p-1}$.

   b. En déduire que $2^{pq}-1$ est divisible par 2^p-1.

   c. En déduire que si un entier k supérieur ou égal à 2 n'est pas premier, alors M_k ne l'est pas non plus.

3. **a.** Prouver que le nombre de Mersenne M_{11} n'est pas premier.

   b. Que peut-on en déduire concernant la conjecture de la question 1. b. ?

Partie C

Le test de Lucas-Lehmer permet de déterminer si un nombre de Mersenne donné est premier. Ce test utilise la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 4$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1}=u_n^2-2.$$

Si n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, le test permet d'affirmer que le nombre M_n est premier si et seulement si $u_{n-2} \equiv 0 \quad \text{modulo } M_n$. Cette propriété est admise dans la suite.

1. Utiliser le test de Lucas-Lehmer pour vérifier que le nombre de Mersenne M_5 est premier

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

   L'algorithme suivant, qui est incomplet, doit permettre de vérifier si le nombre de Mersenne M_n est premier, en utilisant le test de Lucas-Lehmer.

Variables :	u, M, n et i sont des entiers naturels
Initialisation :	u prend la valeur 4
Traitement :	Demander un entier $n \geqslant 3$
	M prend la valeur ......
	Pour i allant de 1 à ... faire
	u prend la valeur ...
	Fin Pour
	Si M divise u alors afficher « M .... »
	sinon afficher « M .... »

   Recopier et compléter cet algorithme de façon à ce qu'il remplisse la condition voulue.

*

Baccalauréat S Métropole 19 juin 2014

EXERCICE 1 **5 POINTS**

Commun à tous les candidats

Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on désigne par $\mathscr{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_1(x) = x + \mathrm{e}^{-x}.$$

1. Justifier que $\mathscr{C}_1$ passe par le point A de coordonnées $(0\,;\,1)$.
2. Déterminer le tableau de variation de la fonction f_1. On précisera les limites de f_1 en $+\infty$ et en $-\infty$.

Partie B

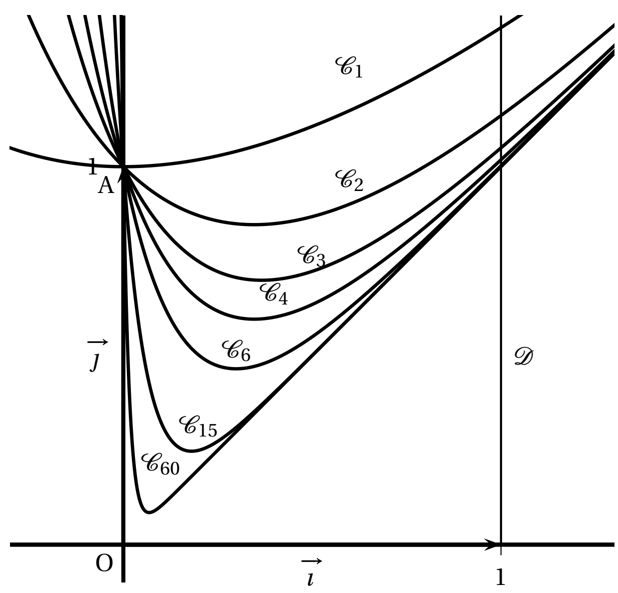
L'objet de cette partie est d'étudier la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$I_n = \int_0^1 \left(x + \mathrm{e}^{-nx}\right)\,\mathrm{d}x.$$

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, pour tout entier naturel n, on note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x + \mathrm{e}^{-nx}.$$

Sur le graphique ci-dessous on a tracé la courbe $\mathscr{C}_n$ pour plusieurs valeurs de l'entier n et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x = 1$.



a. Interpréter géométriquement l'intégrale I_n.

b. En utilisant cette interprétation, formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) et sa limite éventuelle. On précisera les éléments sur lesquels on s'appuie pour conjecturer.

2. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \mathrm{e}^{-(n+1)x}\left(1 - \mathrm{e}^x\right)\,\mathrm{d}x.$$

En déduire le signe de $I_{n+1} - I_n$ puis démontrer que la suite (I_n) est convergente.

3. Déterminer l'expression de I_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (I_n).

*

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Commun à tous les candidats

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

Un laboratoire pharmaceutique propose des tests de dépistage de diverses maladies. Son service de communication met en avant les caractéristiques suivantes :

— la probabilité qu'une personne malade présente un test positif est 0,99 ;
— la probabilité qu'une personne saine présente un test positif est 0,001.

1. Pour une maladie qui vient d'apparaître, le laboratoire élabore un nouveau test. Une étude statistique permet d'estimer que le pourcentage de personnes malades parmi la population d'une métropole est égal à 0,1 %. On choisit au hasard une personne dans cette population et on lui fait subir le test.

On note M l'évènement « la personne choisie est malade » et T l'évènement « le test est positif ».

a. Traduire l'énoncé sous la forme d'un arbre pondéré.

b. Démontrer que la probabilité $p(T)$ de l'évènement T est égale à $1{,}989 \times 10^{-3}$.

c. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.

Affirmation : « Si le test est positif, il y a moins d'une chance sur deux que la personne soit malade ».

2. Le laboratoire décide de commercialiser un test dès lors que la probabilité qu'une personne testée positivement soit malade est supérieure ou égale à 0,95. On désigne par x la proportion de personnes atteintes d'une certaine maladie dans la population.

À partir de quelle valeur de x le laboratoire commercialise-t-il le test correspondant ?

Partie B

La chaine de production du laboratoire fabrique, en très grande quantité, le comprimé d'un médicament.

1. Un comprimé est conforme si sa masse est comprise entre 890 et 920 mg. On admet que la masse en milligrammes d'un comprimé pris au hasard dans la production peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu,\, \sigma^2\right)$, de moyenne $\mu = 900$ et d'écart-type $\sigma = 7$.

a. Calculer la probabilité qu'un comprimé prélevé au hasard soit conforme. On arrondira à 10^{-2}.

b. Déterminer l'entier positif h tel que $P(900-h \leqslant X \leqslant 900+h) \approx 0,99$ à 10^{-3} près.

2. La chaine de production a été réglée dans le but d'obtenir au moins 97 % de comprimés conformes. Afin d'évaluer l'efficacité des réglages, on effectue un contrôle en prélevant un échantillon de 1 000 comprimés dans la production. La taille de la production est supposée suffisamment grande pour que ce prélèvement puisse être assimilé à 1 000 tirages successifs avec remise.

Le contrôle effectué a permis de dénombrer 53 comprimés non conformes sur l'échantillon prélevé.

Ce contrôle remet-il en question les réglages faits par le laboratoire ? On pourra utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

*

EXERCICE 3 **5 POINTS**
Commun à tous les candidats

On désigne par (E) l'équation

$$z^4+4z^2+16=0$$

d'inconnue complexe z.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2+4Z+16=0$.
Écrire les solutions de cette équation sous une forme exponentielle.

2. On désigne par a le nombre complexe dont le module est égal à 2 et dont un argument est égal à $\dfrac{\pi}{3}$.
Calculer a^2 sous forme algébrique.
En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2=-2+2\text{i}\sqrt{3}$. On écrira les solutions sous forme algébrique.

3. Restitution organisée de connaissances

On suppose connu le fait que pour tout nombre complexe $z=x+\text{i}y$ où $x\in\mathbb{R}$ et $y \in R$, le conjugué de z est le nombre complexe z défini par $z=x-\text{i}y$.

Démontrer que :

— Pour tous nombres complexes z_1 et z_2, $\overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$.
— Pour tout nombre complexe z et tout entier naturel non nul n, $\overline{z^n}=\left(\overline{z}\right)^n$.

4. Démontrer que si z est une solution de l'équation (E) alors son conjugué $\overline{z}$ est également une solution de (E).

En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E). On admettra que (E) admet au plus quatre solutions.

*

EXERCICE 4 **5 POINTS**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans l'espace, on considère un tétraèdre ABCD dont les faces ABC, ACD et ABD sont des triangles rectangles et isocèles en A. On désigne par E, F et G les milieux respectifs des côtés [AB], [BC] et [CA].

On choisit AB pour unité de longueur et on se place dans le repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}},\overrightarrow{\text{AC}},\overrightarrow{\text{AD}}\right)$ de l'espace.

1. On désigne par $\mathscr{P}$ le plan qui passe par A et qui est orthogonal à la droite (DF).
   On note H le point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite (DF).
   a. Donner les coordonnées des points D et F.
   b. Donner une représentation paramétrique de la droite (DF).
   c. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.
   d. Calculer les coordonnées du point H.
   e. Démontrer que l'angle $\widehat{\text{EHG}}$ est un angle droit.
2. On désigne par M un point de la droite (DF) et par t le réel tel que $\overrightarrow{\text{D}M} = t\overrightarrow{\text{DF}}$.
   On note α la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{\text{E}M\text{G}}$.
   Le but de cette question est de déterminer la position du point M pour que α soit maximale.
   a. Démontrer que $M\text{E}^2 = \dfrac{3}{2}t^2 - \dfrac{5}{2}t + \dfrac{5}{4}$.
   b. Démontrer que le triangle MEG est isocèle en M.
   En déduire que $M\text{E}\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.
   c. Justifier que α est maximale si et seulement si $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ est maximal.
   En déduire que α est maximale si et seulement si $M\text{E}^2$ est minimal.
   d. Conclure.

*

EXERCICE 4 **5 POINTS**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un pisciculteur dispose de deux bassins A et B pour l'élevage de ses poissons. Tous les ans à la même période :

— il vide le bassin B et vend tous les poissons qu'il contenait et transfère tous les poissons du bassin A dans le bassin B ;

— la vente de chaque poisson permet l'achat de deux petits poissons destinés au bassin A.
Par ailleurs, le pisciculteur achète en plus 200 poissons pour le bassin A et 100 poissons pour le bassin B.

Pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1, on note respectivement a_n et b_n les effectifs de poissons des bassins A et B au bout de n années.
En début de première année, le nombre de poissons du bassin A est $a_0 = 200$ et celui du bassin B est $b_0 = 100$.

1. Justifier que $a_1 = 400$ et $b_1 = 300$ puis calculer a_2 et b_2.
2. On désigne par A et B les matrices telles que $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.
   a. Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n + B$.
   b. Déterminer les réels x et y tels que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$.
   c. Pour tout entier naturel n, on pose $Y_n = \begin{pmatrix} a_n + 400 \\ b_n + 300 \end{pmatrix}$.
   Démontrer que pour tout entier naturel n, $Y_{n+1} = AY_n$.

3. Pour tout entier naturel n, on pose $Z_n = Y_{2n}$.

a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $Z_{n+1} = A^2 Z_n$. En déduire que pour tout entier naturel $n, Z_{n+1} = 2Z_n$.

b. On admet que cette relation de récurrence permet de conclure que pour tout entier naturel n,

$$Y_{2n} = 2^n Y_0.$$

En déduire que $Y_{2n+1} = 2^n Y_1$ puis démontrer que pour tout entier naturel n,

$$a_{2n} = 600 \times 2^n - 400 \quad \text{et} \quad a_{2n+1} = 800 \times 2^n - 400.$$

4. Le bassin A a une capacité limitée à 10 000 poissons.

a. On donne l'algorithme suivant.

Variables :	a, p et n sont des entiers naturels.
Initialisation :	Demander à l'utilisateur la valeur de p.
Traitement :	Si p est pair
	Affecter à n la valeur $\dfrac{p}{2}$
	Affecter à a la valeur $600 \times 2^n - 400$.
	Sinon
	Affecter à n la valeur $\dfrac{p-1}{2}$
	Affecter à a la valeur $800 \times 2^n - 400$.
	Fin de Si.
Sortie :	Afficher a.

Que fait cet algorithme ? Justifier la réponse.

b. Écrire un algorithme qui affiche le nombre d'années pendant lesquelles le pisciculteur pourra utiliser le bassin A.

*

Index