SIMILITUDES

I. Définitions

1. Transformation du plan
   a. Définition
   Une fonction du plan dans lui-même (qui à tout point du plan associe un point du plan) telle que tout point possède exactement un antécédent est appelée transformation du plan.
   b. Transformation réciproque
   Étant donnée une transformation t, la transformation qui à tout point du plan associe son antécédent par t est appelée transformation réciproque de t. On la note t^{-1}.
2. Similitude
   a. Définition
   Une transformation du plan qui conserve les rapports de distances est appelée similitude. Plus précisément, La transformation s est une similitude si pour tous points M, N P et Q, $\frac{MN}{PQ}=\frac{M'N'}{P'Q'}$ où M', N', P', et Q' sont les images respectives de M, N, P et Q par s.
   Remarque : La composée de deux similitude est une similitude.
   b. Rapport d'une similitude
   Étant donnée une similitude s, le rapport $\frac{M'N'}{MN}$ ($M'=s(M)$ et $N'=s(N)$) ne dépend pas du choix des points M et N. On l'appelle rapport de la similitude s. C'est donc un réel strictement positif.

II. Propriétés

1. Propriétés de conservation
   a. Une similitude conserve l'alignement.
   b. Une similitude conserve les angles géométriques.
   c. Une similitude conserve le barycentre.
2. Images des objets usuels
   Par une similitude de rapport k :
   a. L'image d'une droite est une droite.
   b. L'image d'un segment est un segment.
   c. L'image d'un cercle de rayon R est un cercle de rayon kR.
3. Composition et réciproque
   a. La composée $s_1 \circ s_2$ de deux similitudes s_1 et s_2 de rapport respectifs k_1 et k_2 est une similitude de rapport $k_1 k_2$.
   b. Si s est une similitude de rapport k, alors sa transformation réciproque est une similitude de rapport $\frac{1}{k}$.

III. Similitudes directes

1. Définition
   Une similitude qui conserve les angles orientés est appelée similitude directe.
2. Angle d'une similitude directe
   Étant donnée une similitude directe s, l' angle $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'})$ ($M'=s(M)$ et $N'=s(N)$) ne dépend pas du choix des points M et N. On l'appelle angle de la similitude directe s.
   Remarque : si s est une similitude directe d'angle θ, s^{-1} est une similitude directe d'angle $-\theta$.
3. Composée et réciproque
   La composée de deux similitudes directes d'angles θ_1 et θ_2 est une similitude directe d'angle $\theta_1+\theta_2$.
   La réciproque d'une similitude directe d'angle θ est une similitude directe d'angle $-\theta$.
4. Caractérisation complexe
   s est une similitude directe si et seulement si il existe deux nombre complexes a et b tels que pour tout point M d'affixe z dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $M'=s(M)$ a pour affixe $z'=az+b$.
   Remarque : Dans la forme précédente, $a=ke^{i\theta}$, où k et θ sont respectivement le rapport et l'angle de la similitude.
5. Forme réduite
   Si s est est une similitude directe de rapport k et d'angle θ alors on a les deux possibilités suivantes :
   - $k=1$ et $\theta=0$ et s est une translation.
   - f admet un unique point fixe Ω et s est la composée de la rotation r de centre Ω et d'angle θ et de l'homothétie h de centre Ω et de rapport k. On a $s=r\circ h=h\circ r$.
6. Théorème
   Étant donnés quatre points A, B, A' et B' ($A\neq B$ et $A'\neq B'$), il existe une unique similitude directe s telle $s(A)=A'$ et $s(B)=B'$.

IV. Similitudes quelconques

1. Similitudes indirectes
   Une similitude s telles que pour tous points distincts A, B et C, $(\overrightarrow{s(A)s(B)}, \overrightarrow{s(A)s(C)})=-(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est appelée similitude indirecte.
   Propriété : Une similitude est soit directe soit indirecte.
2. Symétries axiales
   Propriétés :
   a. Une similitude différente de l'identité et ayant au moins deux point fixes est la symétrie axiale d'axe la droite passant par ces deux points.
   b. Quelque soit la similitude indirecte s et la symétrie axiale σ, il existe une similitude directe s' telle que $s=s'\circ\sigma$.
3. Caractérisation complexe
   s est une similitude indirecte si et seulement si il existe deux nombre complexes a et b tels que pour tout point M d'affixe z dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $M'=s(M)$ a pour affixe $z'=a\bar{z}+b$.

Annexe

Classification des similitudes selon leurs points fixes

point(s) fixe(s)	**type**	**rapport(angle)**	**nature ou décomposition possible**
tout le plan	directe	$1(0)$	identité
une droite	indirecte	1	symétrie axiale
un point Ω	directe	$r(\theta)\neq 1(0)$	composée d'une rotation d'angle θ et d'une homothétie de rapport r, toutes deux de centre Ω
	indirecte	$r\neq 1$	composée d'une symétrie axiale par rapport à une droite d passant par Ω et d'une homothétie de rapport r et de centre Ω
aucun	directe	$1(0)$	translation
	indirecte	1	composée d'une symétrie axiale par rapport à une droite d et d'une translation de vecteur de même direction que d