

SIMILITUDES

I. Définitions

1. Transformation du plan

a. Définition

Une fonction du plan dans lui-même (qui à tout point du plan associe un point du plan) telle que tout point possède exactement un antécédent est appelée transformation du plan.

b. Transformation réciproque

Étant donnée une transformation t , la transformation qui à tout point du plan associe son antécédent par t est appelée transformation réciproque de t . On la note t^{-1} .

2. Similitude

a. Définition

Une transformation du plan qui conserve les rapports de distances est appelée similitude. Plus précisément, La transformation s est une similitude si pour tous points M, N, P et Q , $\frac{MN}{PQ} = \frac{M'N'}{P'Q'}$ où M', N', P' , et Q' sont les images respectives de M, N, P et Q par s .

Remarque : La composée de deux similitude est une similitude.

b. Rapport d'une similitude

Étant donnée une similitude s , le rapport $\frac{M'N'}{MN}$ ($M' = s(M)$ et $N' = s(N)$) ne dépend pas du choix des points M et N . On l'appelle rapport de la similitude s . C'est donc un réel strictement positif.

II. Propriétés

1. Propriétés de conservation

- Une similitude conserve l'alignement.
- Une similitude conserve les angles géométriques.
- Une similitude conserve le barycentre.

2. Images des objets usuels

Par une similitude de rapport k :

- L'image d'une droite est une droite.
- L'image d'un segment est un segment.
- L'image d'un cercle de rayon R est un cercle de rayon kR .

3. Composition et réciproque

- La composée $s_1 \circ s_2$ de deux similitudes s_1 et s_2 de rapport respectifs k_1 et k_2 est une similitude de rapport $k_1 k_2$.
- Si s est une similitude de rapport k , alors sa transformation réciproque est une similitude de rapport $\frac{1}{k}$.

III. Similitudes directes

1. Définition

Une similitude qui conserve les angles orientés est appelée similitude directe.

2. Angle d'une similitude directe

Étant donnée une similitude directe s , l'angle $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'})$ ($M' = s(M)$ et $N' = s(N)$) ne dépend pas du choix des points M et N . On l'appelle angle de la similitude directe s .

Remarque : si s est une similitude directe d'angle θ , s^{-1} est une similitude directe d'angle $-\theta$.

3. Composée et réciproque

La composée de deux similitudes directes d'angles θ_1 et θ_2 est une similitude directe d'angle $\theta_1 + \theta_2$.

La réciproque d'une similitude directe d'angle θ est une similitude directe d'angle $-\theta$.

4. Caractérisation complexe

s est une similitude directe si et seulement si il existe deux nombre complexes a et b tels que pour tout point M d'affixe z dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , $M' = s(M)$ a pour affixe $z' = az + b$.

Remarque : Dans la forme précédente, $a = k e^{i\theta}$, où k et θ sont respectivement le rapport et l'angle de la similitude.

5. Forme réduite

Si s est une similitude directe de rapport k et d'angle θ alors on a les deux possibilités suivantes :

- $k=1$ et $\theta=0$ et s est une translation.
- f admet un unique point fixe Ω et s est la composée de la rotation r de centre Ω et d'angle θ et de l'homothétie h de centre Ω et de rapport k . On a $s = r \circ h = h \circ r$.

6. Théorème

Étant donnés quatre points A, B, A' et B' ($A \neq B$ et $A' \neq B'$), il existe une unique similitude directe s telle $s(A) = A'$ et $s(B) = B'$.

IV. Similitudes quelconques

1. Similitudes indirectes

Une similitude s telles que pour tous points distincts A, B et C , $(s(A)\overrightarrow{s(B)}, s(A)\overrightarrow{s(C)}) = -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est appelée similitude indirecte.

Propriété : Une similitude est soit directe soit indirecte.

2. Symétries axiales

Propriétés :

- Une similitude différente de l'identité et ayant au moins deux point fixes est la symétrie axiale d'axe la droite passant par ces deux points.
- Quelque soit la similitude indirecte s et la symétrie axiale σ , il existe une similitude directe s' telle que $s = s' \circ \sigma$.

3. Caractérisation complexe

s est une similitude indirecte si et seulement si il existe deux nombre complexes a et b tels que pour tout point M d'affixe z dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , $M' = s(M)$ a pour affixe $z' = a\bar{z} + b$.

Annexe

Classification des similitudes selon leurs points fixes

point(s) fixe(s)	type	rapport(angle)	nature ou décomposition possible*
tout le plan	directe	$1(0)$	identité
une droite	indirecte	1	symétrie axiale
un point Ω	directe	$r(\theta) \neq 1(0)$	composée d'une rotation d'angle θ et d'une homothétie de rapport r , toutes deux de centre Ω
	indirecte	$r \neq 1$	composée d'une symétrie axiale par rapport à une droite d passant par Ω et d'une homothétie de rapport r et de centre Ω
aucun	directe	$1(0)$	translation
	indirecte	1	composée d'une symétrie axiale par rapport à une droite d et d'une translation de vecteur de même direction que d

*Les décompositions proposées ne sont pas les seules possibles mais se sont les seules pour lesquelles la composée commute et dans ce cas elles sont uniques.