

MATRICES

I. Définitions

1. Définition

Une matrice est un tableau de nombres. Exemple $A = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 3 \\ 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}$.

L'élément de la deuxième ligne et de la première colonne de cette matrice peut se noter a_{21} . Ici $a_{21} = 5$.

2. Format

Le format d'une matrice est son nombre de lignes et son nombre de colonnes.

Exemple : Le format de la matrice A précédente est 2×3 .

3. Transposée

La transposée A^T d'une matrice A est obtenue en intervertissant les lignes et les colonnes. Donc :

- Si A est de format $n \times p$, alors A^T est de format $p \times n$.

- Si on note a_{ij} les éléments de A et a'_{ij} ceux de A^T alors : $a_{ij} = a'_{ji}$.

- La transposée de la matrice A précédente est $A^T = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 9 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$.

II. Opérations de base

1. Addition

La somme $A+B$ de deux matrice A et B de même format est une matrice de même format que A et B , obtenue en faisant la somme des éléments de même ligne et même colonne. Si on note c_{ij} les éléments de $A+B$, on a $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Exemple Si $B = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 13 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ et si A est la matrice précédente, alors on a

$$A+B = \begin{bmatrix} 6 & 16 & 0 \\ 18 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

2. Multiplication par un réel.

On multiplie une matrice par un réel en multipliant tous ces éléments par ce réel. Si on note b_{ij} un élément de la matrice $k \times A$, on a $b_{ij} = k a_{ij}$.

Exemple $-3 \times A = \begin{bmatrix} -12 & -27 & -9 \\ -15 & -9 & 6 \end{bmatrix}$.

III. Produit de Matrices

1. Condition

On définit le produit deux matrices vérifiant la propriété suivante :

Le nombre de colonnes de la première est égale au nombre de lignes de la deuxième.

2. Définition

Si A est une matrice de format $n \times p$, et B une matrice de format $p \times m$, alors les éléments c_{ij} de la matrice $A \times B$ de format $n \times m$ sont définis par

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} \times b_{kj}.$$

Exemple : $A = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 3 \\ 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ est de format 2×3 et $B^T = \begin{bmatrix} 2 & 13 \\ 7 & -1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ de format

3×2 . Donc on peut définir $A \times B^T$ qui sera de format 2×2 . L'élément c_{21} de

$$A \times B^T \text{ sera défini par } c_{21} = \sum_{k=1}^3 a_{2k} \times b_{k1} = a_{21} \times b_{11} + a_{22} \times b_{21} + a_{23} \times b_{31}. \text{ Pour}$$
$$= 5 \times 2 + 3 \times 7 + (-2) \times (-3) = 10 + 21 + 6 = 37$$

les autres : $c_{11} = 4 \times 2 + 9 \times 7 + 3 \times (-3) = 8 + 63 - 9 = 62$,

$$c_{12} = 4 \times 13 + 9 \times (-1) + 3 \times 0 = 52 - 9 + 0 = 43,$$

$$c_{22} = 5 \times 13 + 3 \times (-1) - 2 \times 0 = 65 - 3 - 0 = 62.$$

$$\text{On a donc } A \times B^T = \begin{bmatrix} 62 & 43 \\ 37 & 62 \end{bmatrix}.$$

IV. Compléments

1. Propriétés

Sous réserve de compatibilité des formats, pour trois matrices A , B et C on a :

a. $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$.

b. $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ et $(B + C) \times A = B \times A + C \times A$.

c. En général, $A \times B \neq B \times A$.

2. Identité

une matrice carrée $n \times n$ telle que $a_{ij} = 1$ si $i = j$, et $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ est

appelée matrice identité. Exemple $Id_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Si Id_n et Id_p sont les matrices identité de formats respectifs $n \times n$ et $p \times p$, et A une matrice de format $n \times p$, alors $A \times Id_p = A$ et $Id_n \times A = A$.

3. Inverse

Si A est une matrice carrée, il existe au plus une matrice B telle que $A \times B = Id_n$. Dans ce cas on a aussi $B \times A = Id_n$. On appelle cette matrice B matrice inverse de A et on la note A^{-1} .

Remarque : Si les matrices A et B sont inversibles, alors $A \times B$ est inversible et $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$.

4. Matrice diagonale

a. Si A est une matrice carrée, la matrice $A \times A \times \dots \times A$ se note A^n .

b. Une matrice carrée telle que $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ est appelée matrice diagonale.

Si on note a'_{ij} les éléments de la matrice A^n , alors $a'_{ij} = a_{ij}^n$.