

# NOMBRES PREMIERS, CONGRUENCES

## I. Division euclidienne dans $\mathbf{Z}$

### 1. Diviseur

On dit que l'entier  $a$  est un diviseur de l'entier  $b$  s'il existe un entier  $k$  tel que  $b=ka$ . Dans ce cas, on dit aussi que  $a$  divise  $b$  et que  $b$  est un multiple de  $a$  et on note  $a|b$ .

### 2. Quelques propriétés

a. Si  $a|b$  et  $b|c$  alors  $a|c$ .

b. Si  $a|b$  et  $b|a$  alors  $a=b$  ou  $a=-b$ .

c. Si  $a|b$  et  $a|c$  alors, quels que soient les entiers  $\beta$  et  $\gamma$ ,  $a|(\beta b + \gamma c)$ .

### 3. Division euclidienne.

Étant donné un entier  $a$  et un entier  $b$  non nul, il existe un unique couple  $(q;r)$  d'entiers tels que  $a=qb+r$  avec  $0 \leq r < |b|$ .  $q$  est appelé quotient et  $r$  est appelé reste de la division euclidienne de  $a$  par  $b$ .

## II. Nombres premiers

### 1. Définition

On dit que l'entier naturel  $p$  est premier s'il admet exactement deux diviseurs positifs, 1 et  $p$ .

Remarques : 1) 0 et 1 ne sont pas des nombres premiers.

2) Il existe une infinité de nombres premiers.

### 2. Décomposition en produit de facteurs premiers

Tout entier naturel  $n$  se décompose de façon unique sous la forme :

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}$$

avec,  $p_i$  premier ( $1 \leq i \leq m$ ) et  $p_i < p_j$  pour  $i < j$ . Cette écriture est appelée décomposition de  $n$  en produit de facteurs premiers.

### 3. Nombres premiers entre eux

On dit que les entiers  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux si leurs seuls diviseurs communs sont 1 et -1

## III. Congruences

### 1. Définition

Étant donné trois entiers,  $a$ ,  $b$  et  $n$  avec  $n \geq 2$ , on dit que  $a$  est congru à  $b$  modulo  $n$  si  $n|(a-b)$ . On note  $a \equiv b(n)$ .

Exemple :  $4 \equiv 19(5)$  car  $19-4=15$  et  $5|15$ .

Remarque : 1)  $a \equiv b(n)$  équivaut à dire que  $a$  et  $b$  ont le même reste pour la division euclidienne par  $n$ .  $a \equiv 0(n) \Leftrightarrow n|a$ .

2) Il existe un unique entier  $r$  tel que  $0 \leq r < n$  et  $a \equiv r(n)$ .

### 2. Propriétés

a. Si  $a \equiv b(n)$  et si  $n'|n$  ( $n' \geq 2$ ) alors  $a \equiv b(n')$ .

b. Si  $a \equiv a'(n)$  et  $b \equiv b'(n)$  alors  $a+b \equiv a'+b'(n)$ ,  $a-b \equiv a'-b'(n)$  et  $ab \equiv a'b'(n)$ .

Conséquence : pour tout entier  $p \geq 1$ ,  $a \equiv b(n) \Rightarrow a^p \equiv b^p(n)$ .