MATRICES

I. Définitions

1. Définition

   Une matrice est un tableau de nombres. Exemple $A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 3 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

   L'élément de la deuxième ligne et de la première colonne de cette matrice peut se noter $a_{2\,1}$. Ici $a_{2\,1} = 5$.

2. Format
   Le format d'une matrice est son nombre de lignes et son nombre de colonnes.
   Exemple : Le format de la matrice A précédente est 2×3.

3. Transposée
   La transposée A^T d'une matrice A est obtenue en intervertissant les lignes et les colonnes. Donc :
   - Si A est de format $n \times p$, alors A^T est de format $p \times n$.
   - Si on note $a_{i\,j}$ les éléments de A et $a'_{i\,j}$ ceux de A^T alors : $a_{i\,j} = a'_{j\,i}$.
   - La transposée de la matrice A précédente est $A^T = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 9 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

II. Opérations de base

1. Addition
   La somme $A+B$ de deux matrice A et B de même format est une matrice de même format que A et B, obtenue en faisant la somme des éléments de même ligne et même colonne. Si on note $c_{i\,j}$ les éléments de $A+B$, on a $c_{i\,j} = a_{i\,j} + b_{i\,j}$.
   Exemple Si $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 13 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et si A est la matrice précédente, alors on a
   $A+B = \begin{pmatrix} 6 & 16 & 0 \\ 18 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Multiplication par un réel.
   On multiplie une matrice par un réel en multipliant tous ces éléments par ce réel. Si on note $b_{i\,j}$ un élément de la matrice $k \times A$, on a $b_{i\,j} = k\,a_{i\,j}$.
   Exemple $-3 \times A = \begin{pmatrix} -12 & -27 & -9 \\ -15 & -9 & 6 \end{pmatrix}$.

III. Produit de Matrices

1. Condition
   On définit le produit deux matrices vérifiant la propriété suivante :
   Le nombre de colonnes de la première est égale au nombre de lignes de la deuxième.

2. Définition

   Si A est une matrice de format $n\times p$, et B une matrice de format $p\times m$, alors les élément $c_{i\,j}$ de la matrice $A\times B$ de format $n\times m$ sont définis par

   $c_{i\,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i\,k}\times b_{k\,j}$.

   Exemple : $A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 3 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ est de format 2×3 et $\mathrm{B}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 13 \\ 7 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ de format 3×2 Donc on peut définir $A\times B^T$ qui sera de format 2×2. L'élément c_{21} de $A\times B^T$ sera défini par $\begin{aligned} c_{2\,1} &= \sum_{k=1}^{3} a_{2k}\times b_{k1} = a_{2\,1}\times b_{1\,1}+a_{2\,2}\times b_{2\,1}+a_{2\,3}\times b_{3\,1} \\ &= 5\times 2+3\times 7+(-2)\times(-3) = 10+21+6 = 37 \end{aligned}$. Pour les autres : $c_{1\,1} = 4\times 2+9\times 7+3\times(-3) = 8+63-9 = 62$,

   $c_{1\,2} = 4\times 13+9\times(-1)+3\times 0 = 52-9+0 = 43$,

   $c_{2\,2} = 5\times 13+3\times(-1)-2\times 0 = 65-3-0 = 62$.

   On a donc $A\times B^T = \begin{bmatrix} 62 & 43 \\ 37 & 62 \end{bmatrix}$.

IV. Compléments

1. Propriétés

   Sous réserve de compatibilité des formats, pour trois matrices A, B et C on a :

   a. $(A\times B)\times C = A\times(B\times C)$.

   b. $A\times(B+C) = A\times B+A\times C$ et $(B+C)\times A = B\times A+C\times A$.

   c. En général, $A\times B\neq B\times A$.

2. Identité

   une matrice carrée $n\times n$ telle que $a_{i\,j} = 1$ si $i = j$, et $a_{i\,j} = 0$ si $i\neq j$ est appelée matrice identité. Exemple $Id_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Si Id_n et Id_p sont les matrices identité de formats respectifs $n\times n$ et $p\times p$, et A une matrice de format $n\times p$, alors $A\times Id_p = A$ et $Id_n\times A = A$.

3. Inverse

   Si A est une matrice carrée, il existe au plus une matrice B telle que $A\times B = Id_n$. Dans ce cas on a aussi $B\times A = Id_n$. On appelle cette matrice B matrice inverse de A et on la note A^{-1}.

   Remarque : Si les matrice A et B sont inversibles, alors $A\times B$ est inversible et $(A\times B)^{-1} = B^{-1}\times A^{-1}$.

4. Matrice diagonale

   a. Si A est une matrice carrée, La matrice $A\times A\times .....\times A$ se note A^n.

   b. Une matrice carrée telle que $a_{i\,j} = 0$ si $i\neq j$ est appelée matrice diagonale. Si on note $a'_{i\,j}$ les éléments de la matrice A^n, alors $a'_{i\,j} = a^n_{i\,j}$.