NOMBRES COMPLEXES

1. i

On considère un nombre imaginaire dont le carré est égal à -1. On le note i.

2. Ensemble des nombres complexes

a. définitions

L'ensemble des nombres s'écrivant sous la forme $a+ib$, où a et b sont des réels s'appelle ensemble des nombres complexes. On le note $\mathbb{C}$.

On effectue des calculs avec des nombres complexes en étendant les règles de calcul sur les nombres réels.

Exemples : $(a+ib)+(a'+ib')=(a+a')+i(b+b')$

$$(a+ib)\times(a'+ib')=(a\times a')+(a\times ib')+(ib\times a')+(ib\times ib')$$
$$=aa'+i^2bb'+i(ab'+ba')=aa'-bb'+i(ab'+ba')$$
$$\frac{1}{a+ib}=\frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)}=\frac{a-ib}{a^2+b^2+i(ba-ab)}=\frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

Si $z=a+ib$ est un nombre complexe, a s'appelle partie réelle de z, on la note $\operatorname{Re}(z)$ et b s'appelle partie imaginaire de z, on la note $\operatorname{Im}(z)$.

Remarque : Si $\operatorname{Im}(z)=0$, z est un nombre réel et si $\operatorname{Re}(z)=0$, z est dit imaginaire pur.

Si $z=a+ib$, L'écriture $a+ib$ est appelé forme algébrique de z.

b. Propriétés

$z=0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z)=0 \text{ et } \operatorname{Im}(z)=0$

$z=z' \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z)=\operatorname{Re}(z') \text{ et } \operatorname{Im}(z)=\operatorname{Im}(z')$.

3. Conjugué d'un nombre complexe

a. Définition

On appelle conjugué du nombre complexe z, le nombre complexe de même partie réelle et de partie imaginaire opposée. On le note $\overline{z}$. On a donc $\overline{a+ib}=a-ib$

b. Propriétés

Si z et z' sont deux nombre complexes, on a :

- $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$.
- $\overline{-z}=-\overline{z}$.
- $\overline{z\times z'}=\overline{z}\times\overline{z'}$.
- Si $z\neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\overline{z}}$.
- Pour tout entier naturel n, $\overline{z^n}=\overline{z}^n$.

Pour tout nombre complexe z, $\overline{\overline{z}}=z$.

c. $z+\overline{z}=2\operatorname{Re}(z)$ et $z-\overline{z}=2\operatorname{Im}(z)$.

Conséquence : z réel équivaut à $z=\overline{z}$ et z imaginaire pur équivaut à $z=-\overline{z}$.

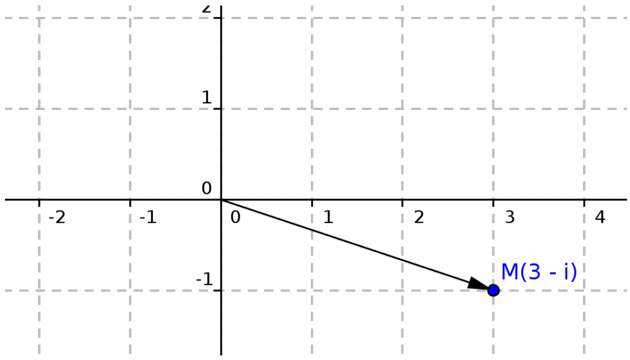
4. Représentation graphique

a. Affixe

On représente les nombres complexes dans un plan munit d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Le nombre complexe $a+ib$ est représenté par le point de coordonnées (a,b).

Réciproquement, le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(a;b)$ et le point M de coordonnées $(a;b)$ peuvent être repérés par le nombre complexe $z=a+ib$. On dit alors que z est l'affixe de $\vec{u}$ et de M et on note $\vec{u}(z)$ et $M(z)$.



b. Quelques propriétés

Si on a $\vec{u}(z)$ et $\vec{v}(z')$ alors $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$ a pour affixe $z+z'$.

Si on a $M(z)$ et $M'(z')$ alors le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z'-z$

Si on a $\vec{u}(z)$ et k un réel, alors $k\vec{u}$ a pour affixe kz.

c. Module

Si $z=a+ib$, alors le réel $\sqrt{a^2+b^2}$ est appelé module de z. On le note $|z|$.

Si $\vec{u}$ a pour affixe z alors $\|\vec{u}\|=|z|$ et si on a $M(z)$ et $M'(z')$ alors $MM'=|z'-z|$.

$|z|=\sqrt{z\bar{z}}$.

5. Équation du second degré

Les solution de l'équation du second degré à coefficients réels $az^2+bz+c=0$ dépendent du discriminant $\Delta=b^2-4ac$. A savoir :

a. Si $\Delta>0$, l'équation a deux solutions réelles distinctes, $z_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

b. Si $\Delta>0$, l'équation a une solution unique, $z=-\dfrac{b}{2a}$

c. Si $\Delta<0$, l'équation a deux solutions complexes conjuguées distinctes, $z_1=\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

6. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

a. Argument

Si le point M a pour affixe $z\neq 0$ dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, alors une mesure de l'angle $(\vec{i};\overrightarrow{OM})$ est appelé argument du nombre complexe z. On le note $arg(z)$.

b. Propriétés du module et de l'argument

Pour tous nombre complexe z :

$|-z| = |\bar{z}| = |z|$.

$arg(-z) = arg(z)+\pi+2k\pi$ et $arg(\bar{z}) = -arg(z)+2k\pi$.

z est réel équivaut à $arg(z) = 0+k\pi$.

z est imaginaire pur équivaut à $arg(z) = \frac{\pi}{2}+k\pi$.

Pour tous nombres complexes z et z' :

$|zz'| = |z|\times|z'|$ et $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

$arg(zz') = arg(z)+arg(z')$,

$arg(\frac{1}{z}) = -arg(z)$,

$arg(\frac{z}{z}') = arg(z)-arg(z')$ et

$arg(z^n) = n\,arg(z)$.

c. Forme trigonométrique

En notant $r = |z|$ et $\theta = arg(z)$, on a $z = r(\cos\theta+i\sin\theta)$.

Cette dernière écriture est appelé forme trigonométrique de z .

d. Notation exponentielle

La relation $arg(zz') = arg(z)+arg(z')$ amène à noter $re^{i\theta}$ le nombre complexe de module r et d'argument θ . On a donc :

$r(\cos\theta+i\sin\theta) = re^{i\theta}$