FONCTION EXPONENTIELLLE

1. Définition

Il existe une unique fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$ et pour tout réel x, $f'(x) = f(x)$.

Cette fonction est appelé fonction exponentielle et noté exp.

2. Propriétés algébriques

Pour tout réels a et b, on a :

a. $\exp(a) > 0$.

b. $\exp(-a) = \exp(a)^{-1}$.

c. $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$.

d. $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$.

e. $\exp(\frac{1}{2}a) = \sqrt{\exp(a)}$ (pour $a > 0$)

f. Pour tout entier n, $\exp(na) = \exp(a)^n$.

3. Limites variations et représentation graphique

a. La fonction exponentielle est strictement croissante.

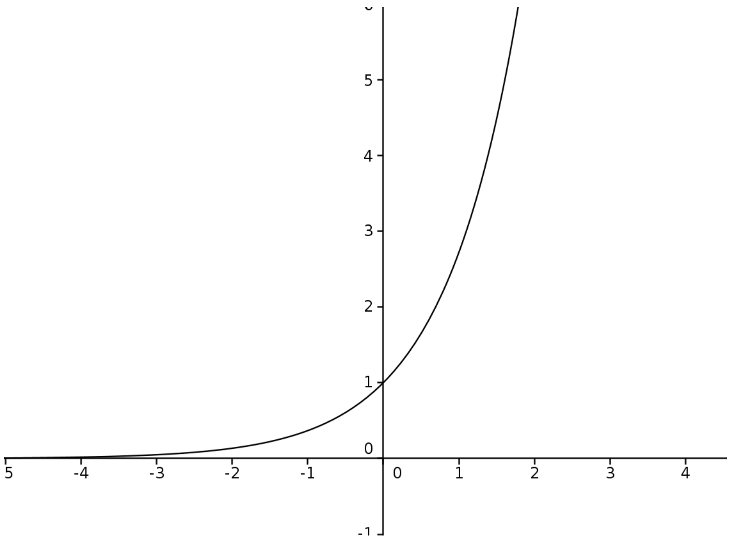
Conséquence : $\exp(a) = \exp(b) \Leftrightarrow a = b$ et $\exp(a) < \exp(b) \Leftrightarrow a < b$

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$.

c. On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$\exp(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

d. Et la représentation graphique :



4. e

a. Le nombre $\exp(1)$ se note e. On a $e \approx 2{,}718$.

b. Pour tout entier n, $\exp(n) = \exp(n \times 1) = \exp(1)^n = e^n$. Par extension, pour tout réel x, on pose $e^x = \exp(x)$. On a donc, $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$, $e^{a+b} = e^a \times e^b$ et $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$.

5. Quelques limites

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$.

c. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

6. Dérivée de l'exponentielle d'une fonction

Si u est une fonction dérivable et si $f(x) = e^{u(x)}$ alors $f'(x) = e^{u(x)} \times u'(x)$.