INTÉGRATION

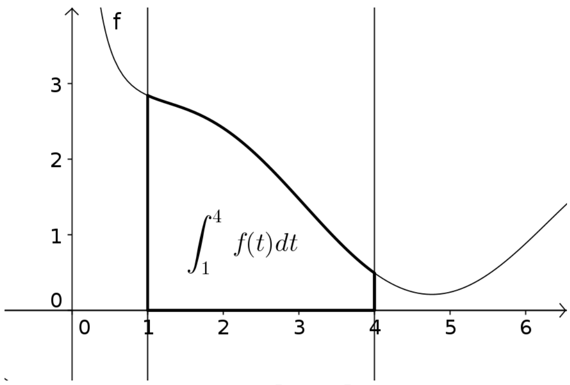
1. Définition

Quand il existe, le réel $\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{(b-a)*i}{n}\right)\times\frac{b-a}{n}$ est appelé intégrale de a à b de la fonction f. On le note $\int_a^b f(t)\,dt$.

Remarques importantes :

a. L'intégrale d'une fonction f sur un intervalle $[a;b]$ représente la « somme » des valeurs de f sur $[a;b]$.

b. Si f est une fonction positive et si $a \le b$, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ est une mesure de l'aire du domaine compris entre les droites d'équations $x=a$ et $x=b$, l'axe des abscisses et la courbe représentative de f.



c. Si f est une fonction continue sur $[a;b]$ alors l'intégrale de f sur $[a;b]$ existe.

2. Propriétés

a. Positivité

Si $a \le b$ et si $f(x) \ge 0$ sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(t)\,dt \ge 0$.

Remarque : Pour toute fonction f définie en a, $\int_a^a f(t)\,dt = 0$

b. Linéarité

Si f et g sont deux fonctions intégrables sur $[a;b]$ alors pour tous réels α et β on a :

$$\int_a^b (\alpha f(t)+\beta g(t))\,dt = \alpha\int_a^b f(t)\,dt+\beta\int_a^b g(t)\,dt$$

c. Relation de Chasles

Si f est une fonction intégrable sur un intervalle I, alors pour tous réels a, b et c de I :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt+\int_c^b f(t)\,dt$$

3. Primitive d'une fonction

a. Définition

Étant donnée une fonction f définie sur un intervalle I , On dit que la fonction F est une primitive de f sur I si $F' = f$ sur I .

b. Propriété

Si F_1 et F_2 sont deux primitives de f sur un intervalle I , alors $F_2 - F_1$ est une fonction constante.

Conséquence : Si $x_0 \in I$, Il existe au plus une primitive de F sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

c. Règles de calcul

Si F et G sont des primitives respectives des fonctions f et g , alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ et pour tout réel α , αF est une primitive de αf .

Remarque : Il n'existe pas de règle de calcul pour le produit ou pour l'inverse. La détermination de primitives se fait seulement par lecture inverse du tableau de dérivation.

4. Intégration et primitives

a. Propriété fondamentale

Étant donnée une fonction f définie et intégrable sur un intervalle I et un réel $a \in I$, la fonction définie sur I par $x \rightarrow \int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de f qui s'annule en a .

b. Conséquence

Si F est une primitive de f sur $[a;b]$ alors $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$.

(On peut noter la différence $F(b) - F(a)$, $[F(x)]_a^b$)

c. Théorème

Toute fonction continue admet des primitives.

5. Valeur moyenne d'une fonction

Le réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$ est appelé valeur moyenne de la fonction f sur $[a;b]$