PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

1. **Définition**

   Étant donnés deux événements A et B, on appelle probabilité de A sachant B le nombre $\dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$. On le note $p_B(A)$. $p_B(A)$ est la probabilité que l'événement A soit réalisé si on sait que l'événement B l'est.

2. **Propriétés**

   Pour tout événement A et B, avec $p(A) \neq 0$,

   a. $0 \leq p_A(B) \leq 1$

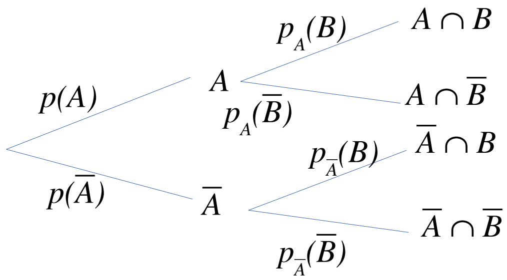
   b. $p_A(\overline{B}) = 1 - p_A(B)$

   c. $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$

3. **Arbres pondérés**

   On a un arbre pondéré en affectant à chaque branche la probabilité de l'événement qu'elle représente sachant que l'événement dont elle est issue est réalisé (La somme des probabilités affectées aux branches issues d'un même nœud est donc toujours égale à 1).

   Exemple : On tire deux carte au hasard successivement dans un jeu de 32. On note A l'événement : « La première carte tirée est un cœur » et B : « La seconde carte tirée est un cœur ». On peut représenter cette situation avec l'arbre suivant :



   ici, $p(A) = \dfrac{1}{4}$, $p(\overline{A}) = \dfrac{3}{4}$, $p_A(B) = \dfrac{7}{31}$, $p_A(\overline{B}) = \dfrac{24}{31}$, $p_{\overline{A}}(B) = \dfrac{8}{31}$ et $p_{\overline{A}}(\overline{B}) = \dfrac{23}{31}$

   Remarque : La probabilité d'un événement est égale au produit des probabilités affectées aux branches qui forment le chemin correspondant à cet événement.

4. **Indépendance**

   On dit que deux événements A et B sont indépendants si :

   $$p(A \cap B) = p(A) \times p(B).$$

   Ceci équivaut à $p_A(B) = p(B)$ si $p(A) \neq 0$.

Ceci signifie donc que de savoir qu'un des deux événements est réalisé ne change pas la probabilité de l'autre.
Exemple : Pour les événements A et B du paragraphe précédent on a :

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{4} \times \frac{7}{31} + \frac{3}{4} \times \frac{8}{31} = \frac{1}{4} \neq p_A(B)$$

donc A et B ne sont pas indépendants.
Propriété : Si A et B sont indépendants alors A est $\bar{B}$ le sont aussi.

5. **Probabilités totales**

Si des événements A_1, A_2, ..., A_n forment une partition de l'univers, c'est-à-dire si quels que soient i et j, $A_i \cap A_j = \emptyset$ et si $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = U$ alors pour tout événement B on a :

$$p(B) = p_{A_1}(B) \times p(A_1) + p_{A_2}(B) \times p(A_2) + ... + p_{A_n}(B) \times p(A_n)$$

Remarque : Pour tout événement A, A et $\bar{A}$ forment une partition.