NOMBRES COMPLEXES

1. i

On considère un nombre imaginaire dont le carré est égal à -1. On le note i.

2. Ensemble des nombres complexes

a. définitions

L'ensemble des nombres s'écrivant sous la forme $a+ib$, où a et b sont des réels s'appelle ensemble des nombres complexes. On le note $\mathbb{C}$.

On effectue des calculs avec des nombres complexes en étendant les règles de calcul sur les nombres réels.

Notamment : $(a+ib)+(a'+ib')=(a+a')+i(b+b')$

$$(a+ib)\times(a'+ib')=(a\times a')+(a\times ib')+(ib\times a')+(ib\times ib')$$
$$=aa'+i^2bb'+i(ab'+ba')=aa'-bb'+i(ab'+ba')$$
$$\frac{1}{a+ib}=\frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)}=\frac{a-ib}{a^2+b^2+i(ba-ab)}=\frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

Si $z=a+ib$ est un nombre complexe, a s'appelle partie réelle de z, on la note $\mathrm{Re}(z)$ et b s'appelle partie imaginaire de z, on la note $\mathrm{Im}(z)$.

Remarque : Si $\mathrm{Im}(z)=0$, z est un nombre réel et si $\mathrm{Re}(z)=0$, z est dit imaginaire pur.

Si $z=a+ib$, L'écriture $a+ib$ est appelé forme algébrique de z.

b. Propriétés

$z=0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=0$ et $\mathrm{Im}(z)=0$

$z=z' \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(z')$.

3. Conjugué d'un nombre complexe

a. Définition

On appelle conjugué du nombre complexe z, le nombre complexe de même partie réelle et de partie imaginaire opposée. On le note $\bar{z}$. On a donc

$\overline{a+ib}=a-ib$

b. Propriétés

Si z et z' sont deux nombres complexes, on a :

- $\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z}'$.
- $\overline{-z}=-\bar{z}$.
- $\overline{z\times z'}=\bar{z}\times\bar{z}'$.
- Si $z\neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\bar{z}}$.

- Pour tout entier naturel n, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

Pour tout nombre complexe z , $\overline{\overline{z}} = z$.

c. $z+\overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ et $z-\overline{z} = 2\,\mathrm{Im}(z)$.

Conséquence : z réel équivaut à $z = \overline{z}$ et

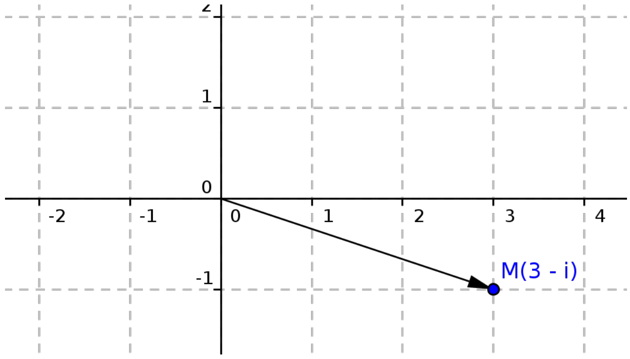
z imaginaire pur équivaut à $z = -\overline{z}$.

4. Représentation graphique

Affixe

On représente les nombres complexes dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Le nombre complexe $a+ib$ est représenté par le point de coordonnées (a, b) .
Réciproquement, le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(a; b)$ et le point M de coordonnées $(a; b)$ peuvent être repérés par le nombre complexe $z = a+ib$. On dit alors que z est l'affixe de $\vec{u}$ et de M et on note $\vec{u}(z)$ et $M(z)$.



a. Quelques propriétés

Si on a $\vec{u}(z)$ et $\vec{v}(z')$ alors $\vec{w} = \vec{u}+\vec{v}$ a pour affixe $z+z'$.

Si on a $M(z)$ et $M'(z')$ alors le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z'-z$

Si on a $\vec{u}(z)$ et k un réel, alors $k\vec{u}$ a pour affixe kz .

b. Module

Si $z = a+ib$, alors le réel $\sqrt{a^2+b^2}$ est appelé module de z . On le note $|z|$.

Si $\vec{u}$ a pour affixe z alors $\|\vec{u}\| = |z|$ et si on a $M(z)$ et $M'(z')$ alors $MM' = |z'-z|$.

Pour tous nombres complexes z et z' :

$|z| = \sqrt{z\overline{z}}$.

$|-z| = |\overline{z}| = |z|$.

$|zz'| = |z| \times |z'|$

et $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

5. **Équation du second degré**

Les solutions de l'équation du second degré à coefficients réels $a z^2+b z+c=0$ dépendent du discriminant $\Delta=b^2-4 a c$. A savoir :

a. Si $\Delta>0$, l'équation a deux solutions réelles distinctes, $z_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2 a}$ et $z_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2 a}$.

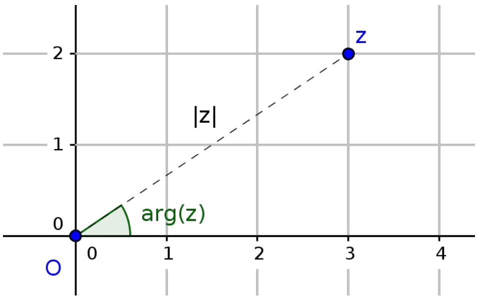
b. Si $\Delta=0$, l'équation a une solution unique, $z=-\dfrac{b}{2 a}$

c. Si $\Delta<0$, l'équation a deux solutions complexes conjuguées distinctes, $z_1=\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2 a}$ et $z_2=\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2 a}$.

6. **Forme trigonométrique d'un nombre complexe**

a. Argument

Si le point M a pour affixe $z\neq 0$ dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, alors une mesure de l'angle $(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM})$ est appelé argument du nombre complexe z. On le note $arg(z)$.



b. Propriétés

Pour tout nombre complexe z :

$arg(-z)=arg(z)+\pi+2k\pi$ et $arg(\bar{z})=-arg(z)+2k\pi$.

z est réel équivaut à $arg(z)=0+k\pi$.

z est imaginaire pur équivaut à $arg(z)=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$.

Pour tous nombres complexes z et z' :

$arg(z z')=arg(z)+arg(z')$,

$arg\left(\dfrac{1}{z}\right)=-arg(z)$,

$arg\left(\dfrac{z}{z'}\right)=arg(z)-arg(z')$ et

$arg(z^n)=n\,arg(z)$.

c. Forme trigonométrique

En notant $r=|z|$ et $\theta=arg(z)$, on a $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$.

Cette dernière écriture est appelée forme trigonométrique de z .

d. Notation exponentielle

La relation $arg(z z') = arg(z) + arg(z')$ amène à noter $r e^{i\theta}$ le nombre complexe de module r et d'argument θ . On a donc :

$r(\cos\theta + i\sin\theta) = r e^{i\theta}$