

FONCTION EXPONENTIELLE

1. Définition

Il existe une unique fonction f définie, continue et dérivable sur \mathbb{R} telle que $f(0) = 1$ et pour tout réel x , $f'(x) = f(x)$.

Cette fonction est appelée fonction exponentielle et notée \exp .

2. Propriétés algébriques

Pour tout réels a et b , on a :

- a. $\exp(a) > 0$.
- b. $\exp(-a) = \exp(a)^{-1}$.
- c. $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$.
- d. $\exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$.
- e. $\exp\left(\frac{1}{2}a\right) = \sqrt{\exp(a)}$.
- f. Pour tout entier n , $\exp(na) = \exp(a)^n$.

3. Limites, variations et représentation graphique

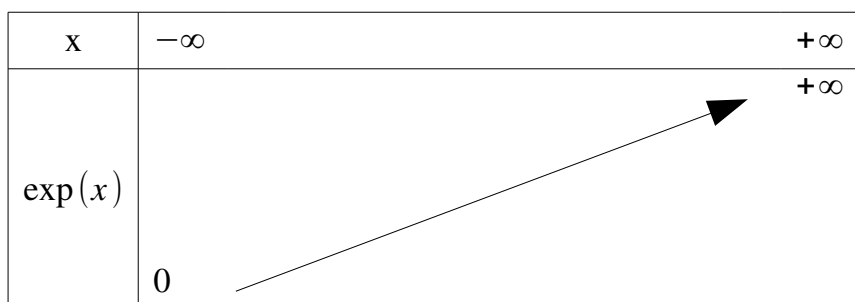
- a. La fonction exponentielle est strictement croissante.

Conséquence : $\exp(a) = \exp(b) \Leftrightarrow a = b$ et $\exp(a) < \exp(b) \Leftrightarrow a < b$

- b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$.

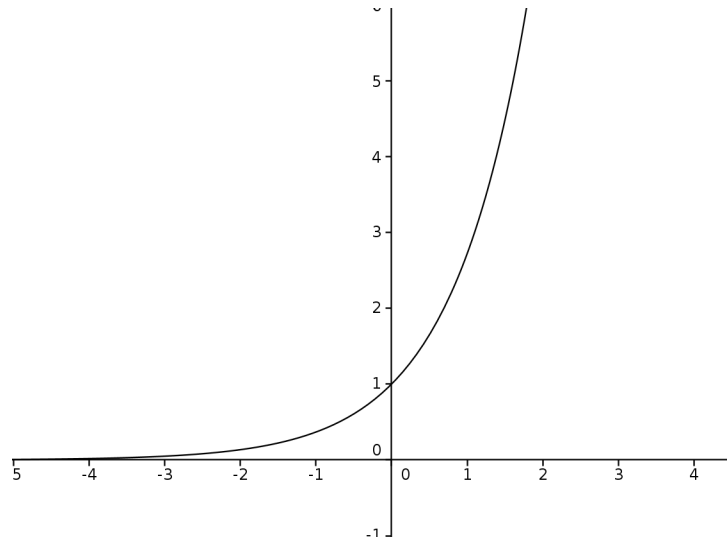
- c. On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$\exp(x)$	0	$+\infty$



The table shows the variation of the exponential function. The x-axis ranges from $-\infty$ to $+\infty$, and the y-axis ranges from 0 to $+\infty$. A diagonal arrow points from the bottom-left corner (0) to the top-right corner ($+\infty$), indicating that the function is strictly increasing.

d. Et la représentation graphique :



4. e

a. Le nombre $\exp(1)$ se note e . $e \approx 2,718$.

b. Pour tout entier n , $\exp(n) = \exp(n \times 1) = \exp(1)^n = e^n$. Par extension, pour

tout réel x , on pose $e^x = \exp(x)$. On a donc, $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$, $e^{a+b} = e^a \times e^b$ et

$$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}.$$

5. Quelques limites

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$.

c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

6. Dérivée de l'exponentielle d'une fonction

Si u est une fonction dérivable et si $f(x) = e^{u(x)}$ alors $f'(x) = e^{u(x)} \times u'(x)$.