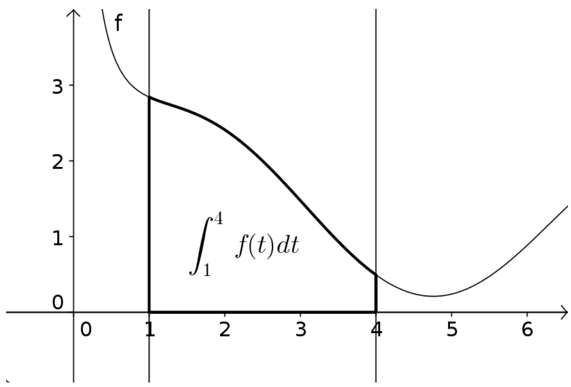
INTÉGRATION

1. Définition

Si f est une fonction continue et positive et si $a \leq b$, alors on appelle intégrale de a à b de la fonction f, et on note $\int_a^b f(t)\,dt$, une mesure de l'aire du domaine compris entre les droites d'équations $x=a$ et $x=b$, l'axe des abscisses et la courbe représentative de f.



Remarques importantes :

a. La définition précédente est une « simplification ». L'intégrale n'est pas une notion géométrique. Une définition plus exacte est la suivante :
Pour tout entier $n > 0$ et tout entier i tel que $0 \leq i < n$, notons $M_n(i)$ (resp $m_n(i)$) le maximum (resp minimum) d'une fonction f sur l'intervalle $\left[a+\frac{(b-a)*i}{n};a+\frac{(b-a)*(i+1)}{n}\right]$ (S'ils existent).
Si $\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n-1} M_n(i)\times\frac{b-a}{n} = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n-1} m_n(i)\times\frac{b-a}{n}$ et si cette limite est un réel, on l'appelle intégrale de a à b de la fonction f.

b. L'intégrale d'une fonction f sur un intervalle $[a;b]$ représente la « somme » des valeurs de f sur $[a;b]$.

c. $\int_a^b f(t)\,dt \geq 0$ et $\int_a^a f(t)\,dt = 0$.

2. Propriétés

a. Linéarité
Si f et g sont deux fonctions continues et positives sur $[a;b]$ alors pour tous réels positifs, α et β on a :

$$\int_a^b (\alpha f(t)+\beta g(t))\,dt = \alpha\int_a^b f(t)\,dt+\beta\int_a^b g(t)\,dt$$

b. Relation de Chasles
Si f est une fonction intégrable sur un intervalle I, alors pour tous réels a, b et c de I :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt+\int_c^b f(t)\,dt$$

c. Ordre

Si f et g sont deux fonctions continues, positives et telles que $f(x) \leq g(x)$ sur $[a;b]$ alors $\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$.

3. Primitive d'une fonction

a. Définition

Étant donnée une fonction f définie sur un intervalle I, On dit que la fonction F est une primitive de f sur I si $F' = f$ sur I.

b. Propriété

Si F_1 et F_2 sont deux primitives de f sur un intervalle I, alors $F_2 - F_1$ est une fonction constante.

Conséquence : Si $x_0 \in I$, Il existe au plus une primitive de F sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

c. Règles de calcul

Si F et G sont des primitives respectives des fonctions f et g, alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ et pour tout réel α, αF est une primitive de αf.

Remarque : Il n'existe pas de règle de calcul pour le produit ou pour l'inverse. La détermination de primitives se fait seulement par lecture inverse du tableau de dérivation.

4. Intégration et primitives

a. Propriété fondamentale

Étant donnée une fonction f définie et intégrable sur un intervalle I et un réel $a \in I$, la fonction définie sur I par $x \rightarrow \int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.

b. Conséquence

Si F est une primitive de f sur $[a;b]$ alors $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$.

(On peut noter la différence $F(b) - F(a)$, $[F(x)]_a^b$)

c. Théorème

Toute fonction continue admet des primitives.

5. Définition généralisée

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et si F est une primitive de f sur $[a;b]$, on définit $\int_a^b f(t)\,dt$ par $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$.

Remarque : Les propriétés vue au paragraphe 2 sont toujours vraies, y compris si $b < a$, si $\alpha < 0$ ou si $\beta < 0$. On a en particulier $\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$ et, si $a \leq b$ et $f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$.

6. Valeur moyenne d'une fonction

Le réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$ est appelé valeur moyenne de la fonction f sur $[a;b]$.