SUITES

1. Raisonnement par récurrence

Pour démontrer qu'une propriété (P_n) dépendant de l'entier n, est vraie à partir du rang n_0 (c'est-à-dire pour tout entier n, tel que $n \geq n_0$), on procède de la façon suivante :

a. Initialisation : On établit que (P_{n_0}) est vraie.

b. Transmission (hérédité) : On démontre que, pour tout entier naturel p au moins égal à n_0, si la propriété (P_p) est vraie (hypothèse de récurrence), alors la propriété (P_{p+1}) est vraie.

c. Conclusion : la propriété (Pn) est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à n_0.

Cette méthode de démonstration s'appelle démonstration par récurrence.

Exemple : Montrons que pour tout entier n, $\sum_{i=0}^{i=n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Notons (P_n) la propriété $\sum_{i=0}^{i=n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

1. (P_0) est la propriété : $\sum_{i=0}^{i=0} i = \frac{0(0+1)}{2}$. Or, $\sum_{i=0}^{i=0} i = 0$ et $\frac{0(0+1)}{2} = 0$ donc la propriété (P_0) est vraie.
2. Supposons que (P_p) est vraie, c'est-à-dire que $\sum_{i=0}^{i=p} i = \frac{p(p+1)}{2}$ alors $\sum_{i=0}^{i=p+1} i = \sum_{i=0}^{i=p} i + p + 1 = \frac{p(p+1)}{2} + p + 1 = \frac{p^2+3p+2}{2}$. Or $\frac{(p+1)(p+1+1)}{2} = \frac{p^2+3p+2}{2}$ donc $\sum_{i=0}^{i=p+1} i = \frac{(p+1)(p+1+1)}{2}$ et la propriété (P_{n+1}) est vraie aussi. On a montré l'hérédité.
3. Conclusion : Pour tout entier naturel n, (P_n) est vraie donc $\sum_{i=0}^{i=n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. Limites

a. Limite réelle

On dit que la suite (u_n) a pour limite le réel l si elle vérifie la propriété suivante :

Pour tout intervalle ouvert I contenant l, il existe N tel que si $n \geq N$ alors $u_n \in I$.
On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$
Dans ce cas on dit que la suite (u_n) converge. Dans tous les autres cas, on dit que la suite (u_n) diverge.

b. Limite infinie
On dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ (resp $-\infty$) si elle vérifie la propriété suivante :
Pour tout réel A, il existe N tel que si $n \geq N$ alors $u_n \geq A$ (resp $u_n \leq A$).
On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ (resp $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$).
Remarque : Dans tous les cas, quand elle existe la limite est unique.

3. Limites usuelles

a. Pour tout entier $k \geq 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^k = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$.

b. $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

4. Opérations sur les limites

On a les règles suivantes :

a. Limite d'une somme.

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n =$	L'	L'	L'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n + v_n =$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

b. Limite d'un produit

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n =$	L'	$L'>0$	$L'<0$	$L'>0$	$L'<0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \times v_n =$	$L \times L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

c. Limite de l'inverse

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$	$L \neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{u_n} =$	$\dfrac{1}{L}$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-

Remarque : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0^+$ signifie qu'il existe N tel que $n > N \Rightarrow u_n \geq 0$

d. Limite d'un quotient

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	$\pm\infty$	$L\neq 0$	$\pm\infty$	L	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$L'\neq 0$	$L'\neq 0$	$0^{\pm}$	$0^{\pm}$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} =$	$\dfrac{L}{L'}$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0	?	?

Remarque Le symbole $\pm$ signifie qu'il faut appliquer la règle des signes

e. Formes indéterminées

Dans les tableaux précédents, le symbole « ? » signifie que les informations données ne permettent pas, à elles seules, de conclure. On dit qu'il s'agit de formes indéterminée. En général on peut conclure en changeant la forme de l'expression.

Exemple : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2-n$ est une forme indéterminée car $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -n=-\infty$. Mais $n^2-n=n(n-1)$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n-1=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n(n-1)=+\infty$ (par produit). Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2-n=+\infty$.

5. Limites par comparaison

a. Si (u_n) et (v_n) sont des suites telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ et s'il existe N tel que $n>N \Rightarrow v_n\geq u_n$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$.

b. Si (u_n) et (v_n) sont des suites telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$ et s'il existe N tel que $n>N \Rightarrow v_n\leq u_n$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=-\infty$.

c. Si (u_n), (v_n) et (w_n) sont des suites telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=l$ et s'il existe N tel que $n>N \Rightarrow u_n\leq w_n\leq v_n$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=l$.

(On appelle cette propriété théorème des gendarmes)

6. Suites monotones

a. Définition

Une suite (u_n) est dite majorée (resp minorée) s'il existe un réel A tel que pour tout n, $u_n\leq A$ (resp $u_n\geq A$).

Une suite à la fois majorée et minorée est dite bornée.

b. Propriétés

Une suite croissante converge si elle est majorée, sinon elle tend vers $+\infty$.

Une suite décroissante converge si elle est minorée, sinon elle tend vers $-\infty$

7. Limite d'une suite géométrique

a. Une suite géométrique converge vers 0 si et seulement si sa raison est strictement comprise entre -1 et 1.

b. Une suite géométrique positive tend vers $\pm\infty$ si sa raison est strictement supérieure à 1.