

NOMBRES COMPLEXES

1. i

On considère un nombre imaginaire dont le carré est égal à -1 . On le note i .

2. Ensemble des nombres complexes

a. définitions

L'ensemble des nombres s'écrivant sous la forme $a+ib$, où a et b sont des réels s'appelle ensemble des nombres complexes. On le note \mathbb{C} .

On effectue des calculs avec des nombres complexes en étendant les règles de calcul sur les nombres réels.

$$\begin{aligned}\text{Notamment : } (a+ib)+(a'+ib') &= (a+a')+i(b+b') \\ (a+ib)\times(a'+ib') &= (a\times a')+(a\times ib')+(ib\times a')+(ib\times ib') \\ &= aa'+i^2bb'+i(ab'+ba') = aa'-bb'+i(ab'+ba') \\ \frac{1}{a+ib} &= \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2+i(ba-ab)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}\end{aligned}$$

Si $z = a+ib$ est un nombre complexe, a s'appelle partie réelle de z , on la note $\text{Re}(z)$ et b s'appelle partie imaginaire de z , on la note $\text{Im}(z)$.

Remarque : Si $\text{Im}(z) = 0$, z est un nombre réel et si $\text{Re}(z) = 0$, z est dit imaginaire pur.

Si $z = a+ib$, L'écriture $a+ib$ est appelé forme algébrique de z .

b. Propriétés

$$z = 0 \Leftrightarrow \text{Re}(z) = 0 \text{ et } \text{Im}(z) = 0$$

$$z = z' \Leftrightarrow \text{Re}(z) = \text{Re}(z') \text{ et } \text{Im}(z) = \text{Im}(z').$$

3. Conjugué d'un nombre complexe

a. Définition

On appelle conjugué du nombre complexe z , le nombre complexe de même partie réelle et de partie imaginaire opposée. On le note \bar{z} . On a donc

$$\overline{a+ib} = a-ib$$

b. Propriétés

Si z et z' sont deux nombres complexes, on a :

- $\overline{z+z'} = \bar{z}+\bar{z}'$.
- $\overline{-z} = -\bar{z}$.
- $\overline{z\times z'} = \bar{z}\times\bar{z}'$.

- Si $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$.
- Pour tout entier naturel n , $\overline{z^n} = \bar{z}^n$.
- Pour tout nombre complexe z , $\overline{\bar{z}} = z$.

c. $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$ et $z - \bar{z} = 2 \operatorname{Im}(z)$.

Conséquence : z réel équivaut à $z = \bar{z}$ et
 z imaginaire pur équivaut à $z = -\bar{z}$.

4. Équation du second degré

Les solutions de l'équation du second degré à coefficients réels $az^2 + bz + c = 0$ dépendent du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. A savoir :

a. Si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions réelles distinctes, $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et

$$z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

b. Si $\Delta = 0$, l'équation a une solution unique, $z = -\frac{b}{2a}$

c. Si $\Delta < 0$, l'équation a deux solutions complexes conjuguées distinctes,

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

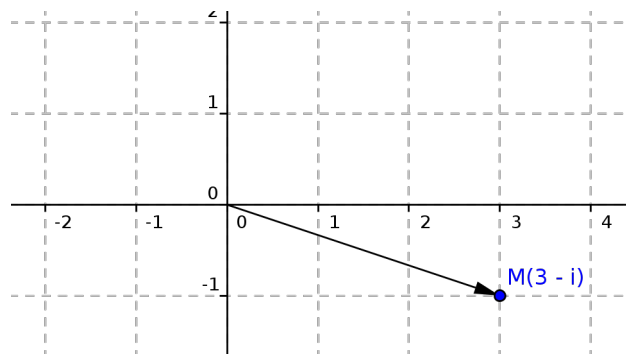
5. Représentation graphique

a. Affixe

On représente les nombres complexes dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Le nombre complexe $a + ib$ est représenté par le point de coordonnées (a, b) .

Réciproquement, le vecteur \vec{u} de coordonnées $(a; b)$ et le point M de coordonnées $(a; b)$ peuvent être repérés par le nombre complexe $z = a + ib$. On dit alors que z est l'affixe de \vec{u} et de M et on note $\vec{u}(z)$ et $M(z)$.



b. Quelques propriétés

Si on a $\vec{u}(z)$ et $\vec{v}(z')$ alors $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ a pour affixe $z + z'$.

Si on a $M(z)$ et $M'(z')$ alors le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z' - z$

Si on a $\vec{u}(z)$ et k un réel, alors $k\vec{u}$ a pour affixe kz .

c. Module

Si $z = a + ib$, alors le réel $\sqrt{a^2 + b^2}$ est appelé module de z . On le note $|z|$.

Si \vec{u} a pour affixe z alors $\|\vec{u}\| = |z|$ et si on a $M(z)$ et $M'(z')$ alors

$$MM' = |z' - z|.$$

Pour tous nombres complexes z et z' :

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}.$$

$$|-z| = |\bar{z}| = |z|.$$

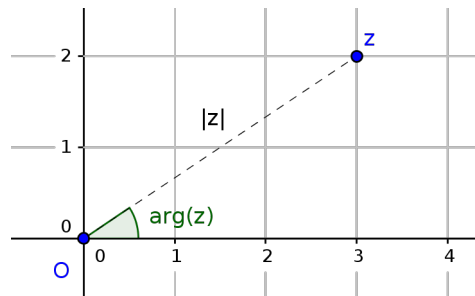
$$|zz'| = |z| \times |z'|$$

$$\text{et } \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

6. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

a. Argument

Si le point M a pour affixe $z \neq 0$ dans le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , alors une mesure de l'angle $(\vec{i}; \overrightarrow{OM})$ est appelé argument du nombre complexe z . On le note $\arg(z)$.



b. Propriétés

Pour tout nombre complexe z :

$$\arg(-z) = \arg(z) + \pi + 2k\pi \text{ et } \arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi.$$

z est réel non nul équivaut à $\arg(z) = 0 + k\pi$.

z est imaginaire pur non nul équivaut à $\arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Pour tous nombres complexes z et z' :

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z'),$$

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z),$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \text{ et}$$

$$\arg(z^n) = n \arg(z) .$$

c. Forme trigonométrique

En notant $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$, on a $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$.

Cette dernière écriture est appelée forme trigonométrique de z .

d. Notation exponentielle

La relation $\arg(z z') = \arg(z) + \arg(z')$ amène à noter $r e^{i\theta}$ le nombre complexe de module r et d'argument θ . On a donc :

$$r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta}$$