LIMITES ET CONTINUITÉ

1. **Limites d'une fonction en $+\infty$ et $-\infty$**

   Les définitions pour les limites en $+\infty$ sont une extension directe de celles des suites.

   a. Limite réelle

   On dit que la fonction f a pour limite le réel l en $+\infty$ si elle vérifie la propriété suivante :
   Pour tout intervalle ouvert I contenant l, il existe x_0 tel que si $x \geq x_0$ alors $f(x) \in I$.
   On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.
   De la même façon, On dit que la fonction f a pour limite le réel l en $-\infty$ si :
   Pour tout intervalle ouvert I contenant l, il existe x_0 tel que si $x \leq x_0$ alors $f(x) \in I$. On note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$.
   Dans ces deux cas, on dit que la droite d'équation $y = l$ est asymptote (horizontale) à la courbe représentative de f.

   b. Limite infinie

   On dit que la fonction f a pour limite $+\infty$ si elle vérifie la propriété suivante :
   Pour tout réel A, il existe x_0 tel que si $x \geq x_0$ alors $f(x) \geq A$.
   On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
   On définit de la même façon $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

2. **Limite d'une fonction en un réel a**

   a. Limite infinie

   On dit que la fonction f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers a si elle vérifie la propriété suivante :
   Pour tout réel A, il existe $\epsilon > 0$ tel que si $|x-a| \leq \epsilon$ alors $f(x) \geq A$.
   On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.
   On définit de façon équivalente, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$
   remarque : On définit aussi, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = -\infty$ en se restreignant aux valeurs de x inférieures à a. De même pour $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty$
   Dans tous ces cas, on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote (verticale)

à la courbe représentative de f.

b. Limite réelle

De façon similaire aux précédentes, on définit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = l$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = l$.

3. Propriétés

a. Dans tous les cas, quand la limite existe elle est unique.

b. Si une fonction f est définie en a et si elle admet une limite en a, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

4. Limites usuelles

a. Pour tout entier $k \geq 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^k = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^k} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^k} = 0$.

Si k est pair, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = +\infty$ et si k est impair, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = -\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{x^k} = +\infty$.

Si k est pair, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \dfrac{1}{x^k} = +\infty$ et si k est impair, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \dfrac{1}{x^k} = -\infty$.

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

5. Opérations sur les limites

On a les règles suivantes, où α désigne $+\infty$, $-\infty$ ou un réel a éventuellement accompagné de $x>a$ ou $x<a$:

a. Limite d'une somme.

$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) =$	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) =$	L'	L'	L'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)+g(x) =$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

b. Limite d'un produit

$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) =$	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) =$	L'	$L'>0$	$L'<0$	$L'>0$	$L'<0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) \times g(x) =$	$L \times L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

c. Limite de l'inverse

$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) =$	$L \neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{1}{f(x)} =$	$\dfrac{1}{L}$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-

d. Limite d'un quotient

$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) =$	L	$\pm\infty$	$L \neq 0$	$\pm\infty$	L	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) =$	$L' \neq 0$	$L' \neq 0$	$0^\pm$	$0^\pm$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$	$\dfrac{L}{L'}$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0	?	?

e. Formes indéterminées

Dans les tableaux précédents, le symbole « ? » signifie que les informations données ne permettent pas, à elles seules, de conclure. On dit qu'il s'agit de formes indéterminées.

f. Limite d'une fonction composée

f et g sont des fonctions et α, β et γ désignent l'un des symboles $+\infty$ ou $-\infty$ ou un réel a éventuellement accompagné de $x > a$ ou $x < a$.

Si $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \beta$ et $\lim\limits_{x \to \beta} g(x) = \gamma$ alors $\lim\limits_{x \to \alpha} g(f(x)) = \gamma$.

6. Limites par comparaison

α désigne $+\infty$, $-\infty$ ou un réel a éventuellement accompagné de $x > a$ ou $x < a$.

a. Si f et g sont des fonctions telles que $\lim\limits_{n \to \alpha} f(x) = +\infty$ et $g(x) \geq f(x)$ alors $\lim\limits_{n \to \alpha} g(x) = +\infty$.

b. Si f et g sont des fonctions telles que $\lim\limits_{n \to \alpha} f(x) = -\infty$ et $g(x) \leq f(x)$ alors $\lim\limits_{n \to \alpha} g(x) = -\infty$.

c. Si f et g et h sont des fonctions telles que $\lim\limits_{n \to \alpha} f(x) = l$, $\lim\limits_{n \to \alpha} g(x) = l$ et $g(x) \leq h(x) \leq f(x)$ alors $\lim\limits_{n \to \alpha} h(x) = l$.

7. Continuité

a. Définitions

On dit que la fonction f est continue en a si $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = f(a)$.

On dit que f est continue sur un intervalle I si f est continue en tout réel a de I.

Remarques : Dire que f est une fonction continue signifie qu'une petite variation de la variable induit une petite variation de la fonction.

La continuité traduit le fait que la courbe représentative de la fonction peut être tracée « sans lever le crayon »

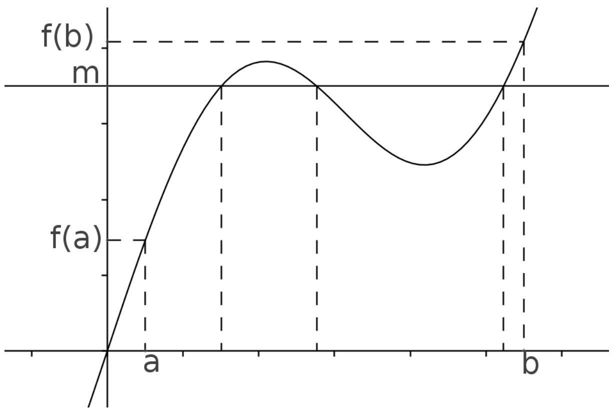
b. Propriétés

Toutes les fonctions usuelles sont continues sur leur ensemble de définition.
Une somme ou un produit de fonctions continues est continu.
Un quotient de fonctions continues est continue partout ou il est défini.
La composée de deux fonctions continues est continue.
Si une fonction est dérivable en a , alors elle est continue en a (La réciproque n'est pas vraie).

8. Théorème des valeurs intermédiaires

a. Théorème

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et si le réel m est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors l'équation $f(x)=m$ a au moins une solution dans $[a;b]$.



b. Corollaire

Si f est une fonction continue strictement monotone sur un intervalle $[a;b]$ et si le réel m est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors l'équation $f(x)=m$ a exactement une solution dans $[a;b]$.