

SUITES

1. Raisonnement par récurrence

Pour démontrer qu'une propriété (P_n) dépendant de l'entier n , est vraie à partir du rang n_0 (c'est-à-dire pour tout entier n , tel que $n \geq n_0$), on procède de la façon suivante :

- a. Initialisation : On établit que (P_{n_0}) est vraie.
- b. Transmission (hérédité) : On démontre que, pour tout entier naturel p au moins égal à n_0 , si la propriété (P_p) est vraie (hypothèse de récurrence), alors la propriété (P_{p+1}) est vraie.
- c. Conclusion : la propriété (P_n) est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à n_0 .

Cette méthode de démonstration s'appelle démonstration par récurrence.

Exemple : Montrons que pour tout entier n , $\sum_{i=0}^{i=n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Notons (P_n) la propriété $\sum_{i=0}^{i=n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

1. (P_0) est la propriété : $\sum_{i=0}^{i=0} i = \frac{0(0+1)}{2}$. Or, $\sum_{i=0}^{i=0} i = 0$ et $\frac{0(0+1)}{2} = 0$ donc la propriété (P_0) est vraie.

2. Supposons que (P_p) est vraie, c'est-à-dire que $\sum_{i=0}^{i=p} i = \frac{p(p+1)}{2}$ alors

$$\sum_{i=0}^{i=p+1} i = \sum_{i=0}^{i=p} i + p + 1 = \frac{p(p+1)}{2} + p + 1 = \frac{p(p+1) + 2(p+1)}{2} = \frac{(p+1)(p+2)}{2}.$$

Donc $\sum_{i=0}^{i=p+1} i = \frac{(p+1)(p+1+1)}{2}$ et la propriété (P_{p+1}) est vraie aussi. On a montré l'hérédité.

3. Conclusion : Pour tout entier naturel n , (P_n) est vraie donc $\sum_{i=0}^{i=n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. Limites

a. Limite réelle

On dit que la suite (u_n) a pour limite le réel l si elle vérifie la propriété suivante :

Pour tout intervalle ouvert I contenant l , il existe N tel que si $n \geq N$ alors

$$u_n \in I.$$

On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

Dans ce cas on dit que la suite (u_n) converge. Dans tous les autres cas, on dit que la suite (u_n) diverge.

b. Limite infinie

On dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ (resp $-\infty$) si elle vérifie la propriété suivante :

Pour tout réel A , il existe N tel que si $n \geq N$ alors $u_n \geq A$ (resp $u_n \leq A$).

On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ (resp $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$).

Remarque : Dans tous les cas, quand elle existe la limite est unique.

3. Limites usuelles

a. Pour tout entier $k \geq 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$.

b. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

4. Opérations sur les limites

On a les règles suivantes :

a. Limite d'une somme.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	L'	L'	L'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n =$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$?$

b. Limite d'un produit

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	L'	$L' > 0$	$L' < 0$	$L' > 0$	$L' < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \times v_n =$	$L \times L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$?$

c. Limite de l'inverse

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	$L \neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} =$	$\frac{1}{L}$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-

Remarque : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0^+$ signifie qu'il existe N tel que $n > N \Rightarrow u_n \geq 0$

d. Limite d'un quotient

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	L	$\pm\infty$	$L \neq 0$	$\pm\infty$	L	$\pm\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	$L' \neq 0$	$L' \neq 0$	0^\pm	0^\pm	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} =$	$\frac{L}{L'}$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0	$?$	$?$

Remarque : Le symbole \pm signifie qu'il faut appliquer la règle des signes

e. Formes indéterminées

Dans les tableaux précédents, le symbole « ? » signifie que les informations données ne permettent pas, à elles seules, de conclure. On dit qu'il s'agit de formes indéterminées. En général on peut conclure en changeant la forme de l'expression.

Exemple : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - n$ est une forme indéterminée car $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ et

$\lim_{n \rightarrow +\infty} -n = -\infty$. Mais $n^2 - n = n(n-1)$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n-1 = +\infty$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(n-1) = +\infty$ (par produit). Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - n = +\infty$.

5. Limites par comparaison

a. Si (u_n) et (v_n) sont des suites telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et s'il existe N tel que

$n > N \Rightarrow v_n \geq u_n$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

b. Si (u_n) et (v_n) sont des suites telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ et s'il existe N tel que

$n > N \Rightarrow v_n \leq u_n$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.

c. Si (u_n) , (v_n) et (w_n) sont des suites telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$ et s'il

existe N tel que $n > N \Rightarrow u_n \leq w_n \leq v_n$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$.

(On appelle cette propriété théorème des gendarmes)

6. Suites monotones

a. Définition

Une suite (u_n) est dite majorée (resp minorée) s'il existe un réel A tel que pour tout n , $u_n \leq A$ (resp $u_n \geq A$).

Une suite à la fois majorée et minorée est dite bornée.

b. Propriétés

Une suite croissante converge si elle est majorée, sinon elle tend vers $+\infty$.

Une suite décroissante converge si elle est minorée, sinon elle tend vers $-\infty$.

7. Limite d'une suite géométrique

a. Une suite géométrique converge vers 0 si et seulement si sa raison est strictement comprise entre -1 et 1 .

b. Une suite géométrique positive tend vers $\pm\infty$ si sa raison est strictement supérieure à 1 .