TS spécialité

corrigé du devoir surveillé n°2

1. Le reste dans la division euclidienne de p par 3 est 0, 1 ou 3. Or, p est premier et $p\geq 7$ donc le reste n'est pas nul. Si le reste est égal à 1, alors $p\equiv 1(3)$ et si le reste est égal à 2 alors $p\equiv 2(3)$ $\Leftrightarrow$ $p\equiv -1(3)$. $1^4=(-1)^4=1$ donc dans tous les cas $p^4\equiv 1(3)$ donc $p^4-1\equiv 0(3)$ et n est divisible par 3.

2. p est impaire (premier et supérieur à 7) donc il existe k tel que $p=2k+1$. On a alors $p^2-1=(2k+1)^2-1=4k^2+4k+1-1=4k^2+4k=4k(k+1)$. $p^4-1=4k(k+1)(p^2+1)$. Un des deux nombres k et $k+1$ est pair, donc $k(k+1)$ est pair donc il existe un entier k_1 tel que $k(k+1)=2k_1$. p est impair, donc p^2 aussi et p^2-1 est pair donc il existe k_2 tel que $p^2+1=2k_2$. Ainsi, $n=4k(k+1)\times 2k_1\times 2k_2=16kk_1k_2(k+1)$ et comme k, k_1 et k_2 sont des entiers, n est divisible par 16.

3. Le reste r dans la division euclidienne de p par 5 est 0, 1, 2, 3 ou 4.
   - $r=0$ est impossible car p est premier et $p\geq 7$ donc p n'est pas multiple de 5.
   - $r=1$ $\Leftrightarrow$ $p\equiv 1(5)$ $\Rightarrow$ $p^4-1\equiv 0(5)$
   - $r=2$ $\Leftrightarrow$ $p\equiv 2(5)$ $\Rightarrow$ $p^4\equiv 16(5)$ $\Rightarrow$ $p^4-1\equiv 15(5)$ $\Leftrightarrow$ $p^4-1\equiv 0(5)$
   - $r=3$ $\Leftrightarrow$ $p\equiv 3(5)$ $\Leftrightarrow$ $p\equiv -2(5)$ $\Rightarrow$ $p^4\equiv 16(5)$ $\Leftrightarrow$ $p^4-1\equiv 15(5)$ $\Leftrightarrow$ $p^4-1\equiv 0(5)$
   - $r=4$ $\Leftrightarrow$ $p\equiv 4(5)$ $\Leftrightarrow$ $p\equiv -1(5)$ $\Rightarrow$ $p^4-1\equiv 15(5)$ $\Leftrightarrow$ $p^4-1\equiv 0(5)$

   Dans tous les cas possibles, $n\equiv 0(5)$ donc n est divisible par 5.

4. a. $a|c$, donc les facteurs de a dans la décomposition en facteurs premiers sont inclus dans ceux de c. de même pour ceux de b. Or a et b sont premiers entre eux, donc ils n'ont pas de facteurs communs dans leurs décomposition. Ainsi, dans la décomposition de c on peut séparer les facteurs de a, ceux de b et ceux qui restent. Ceci revient à écrire $c=abk$ donc $ab|c$.
   b. 3 et 5 sont premiers entre eux et ils divisent n, donc $15|n$. De même pour 15 et 16, donc $240=15\times 16$ divise n.

5. Si p_1, p_2, …., p_n sont 15 nombres premiers supérieurs ou égaux à 7, alors $A=p_1^4+p_2^4+...+p_{15}^4=(p_1^4-1)+(p_2^4-1)+...+(p_{15}^4-1)+15$ et tous les termes de cette somme sont multiples de 15. Donc A est multiple de 15 et n'est donc pas premier.