TS spécialité

corrigé du type bac n°1, exercice de spécialité

1. a. $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A=3-i-(1-2i)=2+i$ et $z_{\overrightarrow{A'B'}}=z_{B'}-z_{A'}=5i-(-2+4i)=2+i$. Donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$ et $ABB'A'$ est un parallélogramme.
   $(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{AB})=arg(\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{AA'}}})=arg(\frac{2+i}{-3+6i})=arg((-3-6i)(2+i))=arg(-15i)=-\frac{\pi}{2}$. Donc $ABB'A'$ est un rectangle.
   b. Soit I le milieu de $[AA']$. (Δ) est la droite passant par I et de vecteur normal $\overrightarrow{AA'}$. On a $z_I=\frac{z_A+z_A'}{2}==-\frac{1}{2}+i$ donc l'équation de (Δ) est $-3(x+\frac{1}{2})+6(y-1)=0 \Leftrightarrow 2x-4y+5=0$.
   c. s est une réflexion, donc une similitude indirecte et donc, il existe deux nombres complexes a et b tels que $z'=a\bar{z}+b$. De plus, $s(A)=A'$ et $s(B)=B'$ donc $-2+4i=a(1+2i)+b$ et $5i=a(3+i)+b$. Ce système amène à $a=\frac{2+i}{2-i}=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$ puis $b=2i-1$.
2. a. $z_C=\left(-\frac{6}{5}-\frac{8}{5}i\right)(1+2i)+5-i=7-5i$ et $z_D=\left(-\frac{6}{5}-\frac{8}{5}i\right)(3+i)+5-i=3-7i$.
   b. $z_{\overrightarrow{\Omega A'}}=-3+3i$, $z_{\overrightarrow{\Omega B'}}=-1+4i$, $z_{\overrightarrow{\Omega C}}=6-6i$ et $z_{\overrightarrow{\Omega D}}=2-8i$. On a donc $\overrightarrow{\Omega C}=-2\overrightarrow{\Omega A'}$ et $\overrightarrow{\Omega D}=-2\overrightarrow{\Omega B'}$ donc C et D sont bien les images respectives de A' et de B' par l'homothétie de centre Ω et de rapport -2.
   c. h est l'homothétie de centre Ω et de rapport -2, donc h^{-1} est l'homothétie de centre Ω et de rapport $-\frac{1}{2}$. On a $M_1=h(M)$, donc $M=h^{-1}(M_1)$ et donc $z-z_\Omega=-\frac{1}{2}(z_1-z_\Omega)$ ce qui donne $z=-\frac{1}{2}z_1+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i$.
3. a. f est la transformation qui à un point M d'affixe z associe le point d'affixe
   $z'=-\frac{1}{2}\left(\left(-\frac{6}{5}-\frac{8}{5}i\right)\bar{z}+5-i\right)+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i=\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\right)\bar{z}-1+2i$.
   b. On voit que $f=s$ donc $s=h^{-1}\circ g \Leftrightarrow g=h\circ s$. Donc pour construire l'image M' d'un point M par g il faut construire l'image M_1 de M par s puis M', l'image de M_1 par h.