TS spé maths

corrigé du bac blanc

Partie A

Montrer qu'il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B' équivaut à montrer qu'il existe un unique couple de nombres complexes (a,b), avec $a\neq 0$ tel que $\begin{cases} z_{A'} = az_A+b \\ z_{B'} = az_B+b \end{cases}$. Or

$\begin{cases} z_{A'} = az_A+b \\ z_{B'} = az_B+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_{A'}-z_{B'} = a(z_A-z_B) \\ z_{B'} = az_B+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{z_{A'}-z_{B'}}{z_A-z_B} \\ z_{B'} = az_B+b \end{cases}$, car $A \neq B$ donc $z_A-z_B \neq 0$. De plus $A' \neq B'$ donc $z_A-z_B \neq 0$ et $a \neq 0$. On obtient ensuite $b = z_{B'}-\dfrac{z_{A'}-z_{B'}}{z_A-z_B}z_B$ donc a et b existent et sont uniques ce qui démontre le résultat cherché.

Partie B

1. $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = arg(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}) = arg(\dfrac{4+4i}{2-2i}) = arg(2i) = \dfrac{\pi}{2}(2\pi)$ donc ABC est rectangle en A.

2. **a.** On cherche a et b tels que $\begin{cases} z_D = az_A+b \\ z_A = az_B+b \end{cases}$. On obtient (voir partie A) $a = \dfrac{-1-i}{2i-2} = \dfrac{i}{2}$ puis $b = i$.

   Donc l'écriture complexe de f est $z' = \dfrac{i}{2}z+i$.

   b. L'angle de f est $arg(\dfrac{i}{2}) = \dfrac{\pi}{2}(2\pi)$. Son rapport est $|\dfrac{i}{2}| = \dfrac{1}{2}$ et l'affixe de son centre vérifie l'équation $z = \dfrac{i}{2}z+i \Leftrightarrow z = \dfrac{2i}{2-i} = \dfrac{2i(2+i)}{(2-i)(2+i)} = -\dfrac{2}{5}+\dfrac{4}{5}i$.

   c. on a $f(A)=D$ et $f(B)=A$, il reste a montrer que $f(C) = E$.
   $\dfrac{i}{2}z_C+i = \dfrac{i}{2}(4+6i)+i = -3+3i=z_E$ donc $f(C) = E$ et DAE est l'image de ABC par f.

   d. DAE est l'image de ABC par f et ABC est rectangle en A, or une similitude conserve les angles donc DAE est rectangle en D.

3. **a.** (Γ_1) est le cercle de diamètre $[AB]$ et (Γ_2) est le cercle de diamètre $[AD]$, $f(A)=D$ et $f(B)=A$ donc (Γ_2) est l'image de (Γ_1) par f. de plus, l'image de (BC) par f est (AE).
   $M \in \Gamma_1\cap(BC)$ donc $f(M) \in \Gamma_2\cap(AE)$. Or $f(M) \neq f(B)$ car $M \neq B$, donc $f(M) \neq A$ et par suite $f(M) = N$.

   b. N est l'image de M par la similitude de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ donc $(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega N}) = \dfrac{\pi}{2}$ et ΩMN est rectangle en Ω.

   c. $f(B)=A$, $f(C)=E$ et $f(M)=N$ or une similitude conserve les rapports de distances donc $\dfrac{NA}{MB} = \dfrac{ME}{MC}$ et donc $MB\times NE=MC\times NA$.