TS spécialité

corrigé de du D.S. n°1

Exercice 1

1. Pour tout n, $n^2+5n+4=(n+1)(n+4)$ et $n^2+3n+2=(n+1)(n+2)$ donc n^2+5n+4 et n^2+3n+2 sont divisibles par $n+1$ pour tout entier n.

2. $(n+1)|3(n+1)^2$ donc $(n+1)|(3n^2+15n+19) \Leftrightarrow (n+1)|((3n^2+15n+19)-3(n+1)^2)$ c'est-à-dire, $(n+1)|(9n+16) \Leftrightarrow (n+1)|((9n+16)-9(n+1)) \Leftrightarrow (n+1)|7$. Or n est un entier naturel donc $n+1=1$ ou $n+1=7$ c'est-à-dire $n=0$ ou $n=6$.

3. Comme $(n+1)|(n^2+3n+2)$ alors $(n^2+3n+2)|(3n^2+15n+19) \Rightarrow (n+1)|(3n^2+15n+19)$. Or ce n'est possible que pour $n=0$ ou $n=6$. Pour $n=0$, $n^2+3n+2=2$ et $3n^2+15n+19=19$ donc $(n^2+3n+2)\nmid(3n^2+15n+19)$. De même pour $n=6$ puisque $56\nmid 217$. Il n'existe donc aucune valeur de n telle que $(n^2+3n+2)\nmid(3n^2+15n+19)$.

Exercice 2

$35=2\times 17+1$ donc $35\equiv 1(17)$ et donc, $35^{121}\equiv 1(17)$. $50=3\times 17-1$ donc $50\equiv -1(17)$ et donc, $50^{251}\equiv(-1)^{251}(17)\equiv -1(17)$. Par suite :

$8\times 35^{121}-12\times 50^{251}\equiv(8\times 1-12\times(-1))(17)\equiv 20(17)\equiv 3(17)$. Or $0\leq 3<17$ donc le reste cherché est 3.

Exercice 3

1. $111=7*16-1$ donc $111\equiv -1(17)$ et $1000=7*143-1$ donc $1000\equiv -1(17)$.

2. $a=999888777666555444333222111=\sum_{i=1}^{9} 111\times i\times 1000^{i-1}=111\times\sum_{i=1}^{9} i\times 1000^{i-1}$ donc

   $a\equiv -1\times\sum_{i=1}^{9} i\times(-1)^{(i-1)}(17)\equiv(-1)\times(1-2+3-4+5-6+7-8+9)(17)\equiv -5(7)\equiv 2(7)$. Le reste cherché ici est donc 2.

   $b=999888777666555444333222111=1000\,a$ donc $b\equiv(-1)\times a(17)\equiv 5(17)$. Le reste cherché est 5.

   $111111=111\times 1000+111$ donc $111111\equiv((-1)\times(-1)+(-1))(17)\equiv 0(17)$. 111111 est donc un multiple de 17. Comme $999999888888777777666666555555444444333333222222111111$ est un multiple de 111111, le reste cherché est donc 0.