TS spécialité Mercredi 9 novembre 2011

Devoir surveillé n°2

On pourra utiliser dans ce problème les deux théorèmes suivants :

- Petit théorème de Fermat :
  Si p est un nombre premier et si p ne divise pas a alors $a^{p-1} \equiv 1(p)$.
- Théorème de Gauss :
  Si $a|bc$ et si a et b sont premiers entre eux, alors $a|c$.

Partie A

On considère l'ensemble $A_7 = \{1;2;3;4;5;6\}$

1. Pour tout élément a de A_7 écrire dans le tableau annexe figurant ci-dessous l'unique élément y de A_7 tel que $a\,y \equiv 1(7)$.
2. Pour x entier relatif, démontrer que l'équation $3x \equiv 5(7)$ équivaut à $x \equiv 4(7)$.
3. Si a est un élément de A_7 , montrer que les seuls entiers relatifs x solutions de l'équation $a\,x \equiv 0(7)$ sont les multiples de 7 .

Partie B

Dans toute cette question, p est un nombre premier supérieur ou égal à 3 . On considère l'ensemble $A_p = \{1;2;\ldots;p-1\}$ des entiers naturels non nuls et strictement inférieurs à p . a est un élément de A_p .

1. Vérifier que a^{p-2} est une solution de l'équation $a\,x \equiv 1(p)$.
2. On note r le reste dans la division euclidienne de a^{p-2} par p . Démontrer que r est l'unique solution x dans A_p , de l'équation $a\,x \equiv 1(p)$.
3. Soient x et y deux entiers relatifs. Démontrer que $x\,y \equiv 0(p)$ si et seulement si x est un multiple de p où y est un multiple de p .
4. Application : $p=31$. Résoudre dans A_{31} les équations : $2\mathrm{x} \equiv 1(31)$ et $3\mathrm{x} \equiv 1(31)$.
   À l'aide des résultats précédents, résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $6x^2 - 5x + 1 \equiv 0(31)$.

Tableau annexe

a	1	2	3	4	5	6
y						6