1èreS

corrigé de du D.S. n°2

Partie A

1.

a	1	2	3	4	5	6
y	1	4	5	2	3	6

2. $x \equiv 4(7) \Rightarrow 3x \equiv 12(7) \Rightarrow 3x \equiv 5(7)$ car $12 \equiv 5(7)$
$3x \equiv 5(7) \Rightarrow 15x \equiv 25(7) \Rightarrow x \equiv 4(7)$ car $15 \equiv 1(7)$ et $25 \equiv 4(7)$
donc $3x \equiv 5(7) \Leftrightarrow x \equiv 4(7)$.

3. $ax \equiv 0(7) \Leftrightarrow ax | 7$ or $a \in A_7$ donc a et 7 sont premiers entre eux donc, selon le théorème de Gauss, $x | 7$. de plus $x | 7 \Rightarrow ax | 7$ ce qui répond donc à la question.

Partie B

1. $a \times a^{p-2} = a^{p-1}$. p est premier et $a \in A_p$ donc a et p sont premiers entre eux, donc, selon le petit théorème de Fermat, $a^{p-1} \equiv 1(p)$ et donc $a \times a^{p-2} \equiv 1(p)$ et a^{p-2} est solution de l'équation $ax \equiv 1(p)$.

2. r est le reste de la division euclidienne de a^{p-2} par p donc $r \equiv a^{p-2}(p)$. Si x_1 et x_2 sont deux solutions appartenant à A_p (avec $x_1 \geq x_2$) de l'équation $ax \equiv 1(p)$ alors $ax_1 - ax_2 \equiv 0(p) \Leftrightarrow a(x_1 - x_2) \equiv 0(p) \Leftrightarrow a(x_1 - x_2) | p$. Comme a et p sont premiers entre eux, on peut en conclure que $(x_1 - x_2) | p$. Par ailleurs, $x_1 \in A_p$, $x_2 \in A_p$ et $x_1 \geq x_2$ donc $0 \leq x_1 - x_2 < p$ et comme $(x_1 - x_2) | p$, on peut dire que $x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$. L'équation a donc une unique solution dans A_p : r .

3. Supposons que $xy \equiv 0(p)$ et $p \nmid x$. $xy \equiv 0(p) \Leftrightarrow p | xy$ et comme p est premier, p et x sont premiers entre eux et on peut en conclure que $p | y$. De même si $xy = 0(p)$ et $p \nmid y$ alors $p | x$ donc si $xy \equiv 0(p)$ alors $p | x$ ou $p | y$.

4. 31 est premier donc 2^{29} est solution de l'équation $2x \equiv 1(31)$. Or $2^{29} = 2^{5 \times 5 + 4} = (2^5)^5 \times 2^4$ et $2^5 = 32 \equiv 1(31)$ donc $2^{29} \equiv 16(31)$ et $16 \in A_{31}$, c'est donc l'unique solution de l'équation.
De même, $3^{29} = 3^{3 \times 9 + 2} = (3^3)^5 \times 3^2$ et $3^3 \equiv -4(31)$ donc $3^{29} \equiv (-4)^9 \times 9(31)$ puis $(-4)^3 = -64 \equiv -2(31)$ et $(-4)^9 \equiv (-2)^3 \equiv -8(31)$ donc $3^{29} \equiv -72(31) \equiv 21(31)$ qui est donc la solution cherchée.
$6x^2 - 5x + 1 \equiv 0(31) \Leftrightarrow (3x-1)(2x-1) \equiv 0(31) \Leftrightarrow 3x - 1 \equiv 0(31)$ ou $2x - 1 \equiv 0(31)$ ce qui revient donc à $x \equiv 21(31)$ ou $x \equiv 16(31)$.