1èreS

corrigé de du D.S. n°3

1. La transformation f a une écriture complexe du type $z' = az+b$, avec $a = \frac{\sqrt{2}}{4}(-1+i)$ et $b = 0$, donc f est une similitude directe de rapport $|a|$ et d'angle $arg(a)$.

$|a| = |\frac{\sqrt{2}}{4}(-1+i)| = \frac{\sqrt{2}}{4}|(-1+i)| = \frac{\sqrt{2}}{4}\times\sqrt{2} = \frac{1}{2}$.

$arg(a) = arg(\frac{\sqrt{2}}{4}(-1+i)) = arg((-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i))$. Or $-\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{3\pi}{4}$ donc $arg(a) = \frac{3\pi}{4}(2\pi)$.

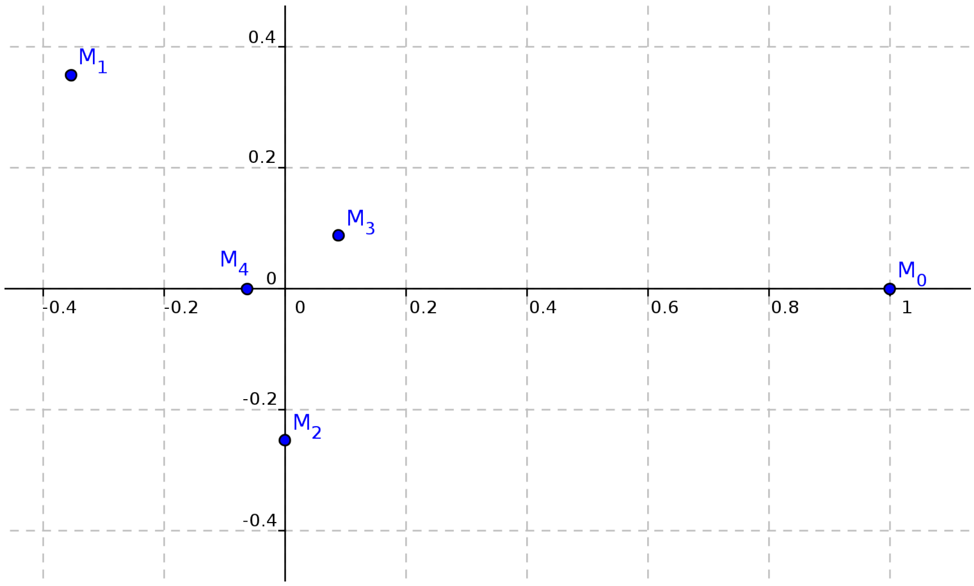
$b = 0$ donc O est le point fixe de f .

f est donc la similitude directe de centre O , de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.

2. a. $z_0 = 1$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^0 e^{i(\frac{3\times0\times\pi}{4})} = 1$ donc la relation est vraie pour $n = 0$.

Supposons la relation vraie au rang p , c'est-à-dire $z_p = \left(\frac{1}{2}\right)^p e^{i(\frac{3p\pi}{4})} = 1$. On a alors $z_{p+1} = a z_p$ or, $|a| = \frac{1}{2}$ et $arg(a) = \frac{3\pi}{4}$, donc $a = \frac{1}{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $z_{p+1} = \frac{1}{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\left(\frac{1}{2}\right)^p e^{i(\frac{3p\pi}{4})} = \left(\frac{1}{2}\right)^{p+1} e^{i(\frac{3(p+1)\pi}{4})}$ donc la propriété est vraie au rang $p+1$. On peut donc en conclure que la propriété est vraie pour tout n .

b. $z_0 = 1$, $z_1 = a = \frac{\sqrt{2}}{4}(-1+i)$, $z_2 = a^2 = \frac{1}{4}e^{i\frac{3\pi}{2}} = -\frac{1}{4}i$, $z_3 = a^3 = \frac{1}{8}e^{i\frac{9\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{16}(1+i)$ et $z_2 = a^4 = \frac{1}{16}e^{3i\pi} = -\frac{1}{16}$



3. O , M_n et M_p alignés équivaut à $(\overrightarrow{OM_n},\overrightarrow{OM_p}) \equiv 0(\pi)$. $(\overrightarrow{OM_n},\overrightarrow{OM_p}) = \frac{3n\pi}{4} - \frac{3p\pi}{4} = \frac{3(n-p)\pi}{4}$ donc O , M_n et M_p alignés équivaut à . $\frac{3(n-p)\pi}{4} \equiv 0(\pi) \Leftrightarrow \frac{3(n-p)\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow 3(n-p) = 4k$ avec $k\in\mathbb{Z}$. $3(n-p) = 4k \Leftrightarrow 4|3(n-p) \Leftrightarrow 4|(n-p)$ car 3 et 4 sont premiers entre eux. On peut donc dire que O , M_n et M_p sont alignés si et seulement si $n \equiv p(4)$.