TS spécialité
Type bac n°1

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1. **a.** Déterminer l'ensemble des couples (x,y) de nombres entiers relatifs, solution de l'équation $(E)\ :\ 8x-5y=3$.

   b. Soit m un nombre entier relatif tel qu'il existe un couple (p,q) de nombres entiers vérifiant $m=8p+1$ et $m=5q+4$.
   Montrer que le couple (p,q) est solution de l'équation (E) et en déduire que $m\equiv 9\ (\text{modulo}\,40)$.

   c. Déterminer le plus petit de ces nombres entiers m supérieurs à 2 000.

2. **a.** Démontrer que pour tout nombre entier naturel k on a : $2^{3k}\equiv 1\ (\text{modulo}\,7)$.

   b. Quel est le reste dans la division euclidienne de 2^{2009} par 7 ?

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Soient a et b deux nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 avec $a\neq 0$.
   On considère le nombre $N=a\times 10^3+b$. On rappelle qu'en base 10 ce nombre s'écrit sous la forme $N=\overline{a00b}$.
   On se propose de déterminer parmi ces nombres entiers naturels N ceux qui sont divisibles par 7.

   a. Vérifier que $10^3\equiv -1\ (\text{modulo}\,7)$.

   b. En déduire tous les nombres entiers N cherchés.