TS spé maths

corrigé du bac blanc

1. **a.** On remarque que le couple $(1\ ;1)$ est solution de (E). Donc, $(E)\ \Leftrightarrow\ 8x-5y=8-5\ \Leftrightarrow\ 8(x-1)=5(y-1)$. Donc si $(x\,;y)$ est solution de (E), alors $5\,|\,8(x-1)$. Or 5 et 8 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Gauss $5\,|\,(x-1)$ et il existe un entier k tel que $x-1=5k$ et donc $x=5k+1$. On a alors $5(y-1)=40k$ et donc $y=8k+1$. Réciproquement, pour tout entier k le couple $(5k+1\ ;8k+1)$ vérifie l'équation (E), c'est donc l'ensemble des solutions cherché.

b. Si $m=8p+1$ et $m=5q+4$. $8p+1=5q+4\ \Leftrightarrow\ 8p-5q=3$ donc le couple $(p\,;q)$ est solution de (E). On peut alors dire qu'il existe un entier k tel que $p=5k+1$ et par suite, $m=8(5k+1)+1=40k+9$ donc $m\equiv 9(40)$.

c. $40|2000$ donc le plus petit entier $m>2000$ tel que $m\equiv 9(40)$ est 2009. On a $2009=8\times 251+1$ et $2009=5\times 401+4$ donc 2009 est bien le nombre cherché.

2. **a.** $2^3=8\equiv 1(7)$ donc pour tout entier $k>0$, $(2^3)^k\equiv 1^k(7)$ c'est-à-dire $2^{3k}\equiv 1(7)$. pour $k=0$, le résultat est aussi vrai ce qui achève la démonstration.

b. $2009=7\times 287$ donc $2^{2009}\equiv 1(7)$ et le reste cherché est 1.

3. **a.** $1000=7\times 143-1$ donc $10^3\equiv -1\ (\text{modulo}\,7)$.

b. $7\,|\,N\ \Leftrightarrow\ N\equiv 0(7)\ \Leftrightarrow\ a\times 10^3+b\equiv 0(7)\ \Leftrightarrow\ -a+b\equiv 0(7)\ \Leftrightarrow\ a\equiv b(7)$. comme $1\leq a\leq 9$ et $0\leq b\leq 9$, on a trois cas possibles, $a=b$, $a=b-7$ ou $a=b+7$. Dans le premier cas on obtient les nombres 1001, 2002, 3003, 4004, 5005, 6006, 7007, 8008, et 9009. Dans le second cas, 1008 et 2009 et dans le troisième, 7000, 8001 et 9002.