

TS spécialité

exo bac blanc

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{20}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$ et B la matrice colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$. On considère la suite de matrice de terme général $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ définie par $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $U_{n+1} = A \times U_n + B$.

1. Montrer qu'il existe un réel k tel que $A \times B = kB$.

2. Soit (V_n) la suite de matrices définie pour tout entier naturel n par $V_n = U_n + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Montrer que $V_{n+1} = A \times V_n$ puis montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $V_{n+1} = 4V_n$.

3. Montrer que $U_{n+1} = 4U_n + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. En déduire que pour tout entier naturel n , x_n et y_n sont des entiers naturels.

4. Montrer que x_n est divisible par 3 si et seulement si y_n est divisible par 3.

5. a. Montrer que $x_n = \frac{1}{3}(4^n \times 5 - 2)$.

b. En déduire que pour tout entier naturel n , $4^n \times 5 - 2$ est multiple de 3.