TS spécialité

corrigé du bac blanc

1. $A\times B=\begin{pmatrix}\frac{7}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{20}{3} & \frac{8}{3}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\20\end{pmatrix}=4B$

2. $V_{n+1}=U_{n+1}+\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}=A\times U_n+B+\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}=A\times(V_n-\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix})+\begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\ \frac{16}{3}\end{pmatrix}=A\times V_n-A\times\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\ \frac{16}{3}\end{pmatrix}=A\times V_n$.

   Soit P_n la proposition : $V_{n+1}=4V_n$.

   d'une part, $V_0=U_0+\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\ \frac{25}{3}\end{pmatrix}$, d'autre part,

   $V_1=U_1+\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}=A\times\begin{pmatrix}1\\8\end{pmatrix}+B+\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{15}{3}\\ \frac{84}{3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\ \frac{25}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{20}{3}\\ \frac{100}{3}\end{pmatrix}=4V_0$, donc P_0 est vraie.

   Supposons La proposition vraie au rang p , c'est-à-dire $V_{p+1}=4V_p$, alors $V_{p+2}=A\times V_{p+1}=A\times 4V_p=4A\times V_p=4V_{p+1}$ donc la proposition est vraie au rang $p+1$ et on peut conclure que pour tout n , $V_{n+1}=4V_n$.

3. $U_{n+1}=V_{n+1}-\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}=4V_n-\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}=4(U_n+\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix})-\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}=4U_n+\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$. Soit P_n la proposition : x_n et y_n sont des entiers naturels.

   $x_0=1$ et $y_0=8$ donc P_0 est vraie.

   Supposons La proposition vraie au rang p , c'est-à-dire x_p et y_p sont des entiers, alors $x_{p+1}=4x_p+2$ et $y_{p+1}=4y_p+1$ donc x_{p+1} et y_{p+1} sont des entiers naturels et la proposition est vraie au rang $p+1$. On peut conclure que pour tout n , x_n et y_n sont des entiers n aturels.

4. $U_{n+1}=A\times U_n+B$ donc $x_{n+1}=\frac{7}{3}x_n+\frac{1}{3}y_n+1$. On sait que x_n , y_n et x_{n+1} sont des entiers, donc si x_n est multiple de 3, alors $\frac{7}{3}x_n$ est entier et par suite $\frac{1}{3}y_n$ est entier et donc y_n est multiple de 3.

   Réciproquement, si y_n est entier alors $\frac{7}{3}x_n$ est entier et comme 7 et 3 sont premiers entre eux, cela implique que x_n est mulptiple de 3.

5. a. Posons $V_n=\begin{pmatrix}z_n\\t_n\end{pmatrix}$. Comme $V_{n+1}=4V_p$, on a $z_{n+1}=4z_n$ et (z_n) est une suite géométrique de raison 4 donc $z_n=4^nz_0=4^n(x_0+\frac{2}{3})=4^n\times\frac{5}{3}$. Par ailleurs, $x_n=z_n-\frac{2}{3}$ donc

   $x_n=4^n\times\frac{5}{3}-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}(4^n\times 5-2)$.

   b. On sait que pour tout n , x_n est entier donc $\frac{1}{3}(4^n\times 5-2)$ est entier et $4^n\times 5-2$ est multiple de 3.