TS spécialité

corrigé de du D.S. n°1

Exercice 1

1. $2n+1 = 2n-6+7 = 2(n-3)+7$ donc $(n-3)|(2n+1) \Leftrightarrow (n-3)|(2(n-3)+7)$. or $(n-3)|(n-3)$ donc $(n-3)|(2n+1) \Rightarrow (n-3)|(2(n-3)+7-2(n-3)) \Leftrightarrow (n-3)|7$. Réciproquement, $(n-3)|7 \Rightarrow (n-3)|(2(n-3)+7)$ donc $(n-3)|(2n+1) \Leftrightarrow (n-3)|7$. 7 est premier donc ses diviseurs sont -7 ; -1 ; 1 et 7 donc $n-3=-7$, $n-3=-1$, $n-3=1$ ou $n-3=7$. L'ensemble cherché est donc $\{-4\ ;2\ ;4\ ;10\}$.

2. $(n-2)(n+1)+5 = n^2-2n+n-2+5 = n^2-n+3$ donc $(n+1)|(n^2-n+3) \Leftrightarrow (n+1)|((n-2)(n+1)+5)$. or $(n+1)|(n+1)$ donc $(n+1)|(n^2-n+3) \Rightarrow (n+1)|((n-2)(n+1)+5-(n-2)(n+1)) \Leftrightarrow (n+1)|5$. Réciproquement, $(n+1)|5 \Rightarrow (n+1)|((n-2)(n+1)+5)$ donc $(n-3)|(n^2-n+3) \Leftrightarrow (n-3)|5$. Ici n est un entier naturel, donc $n+1 \geq 1$. Les diviseurs positifs de 5 sont 1 et 5 donc $n+1=1$ ou $n+1=5$. L'ensemble cherché est donc $\{0\ ;4\}$.

3. $\dfrac{3n+8}{n+4} = \dfrac{3(n+4)-4}{n+4} = 3-\dfrac{4}{n+4}$ donc, dire que la fraction $\dfrac{3n+8}{n+4}$ est un entier équivaut à dire que $n+4$ divise 4. Les diviseurs de 4 sont -4 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 et 4. L'ensemble cherché est donc $\{-8\ ;-6\ ;-5\ ;-3;-2;0\}$.

Exercice 2

Si d est un diviseur commun à a et à b, alors $d|(6k+5)$ et $d|(8k+3)$ donc $d|(4(6k+5)-3(8k+3)) \Leftrightarrow d|11$. or les seuls diviseurs positifs de 11 sont 1 et 11 donc a et b ont au plus deux diviseurs positifs communs.

Exercice 3

1. Supposons n pair, alors n^4 aussi est pair de même que $3n^4$ et $5n$ donc $3n^4+5n$ est pair et $3n^4+5n+1$ est impair.
   Supposons n impair, alors n^4 aussi est impair de même que $3n^4$ et $5n$ donc $3n^4+5n$ est pair et $3n^4+5n+1$ est impair.
   Donc, quel que soit n, $3n^4+5n+1$ est impair.

2. $n(n+1)$ est le produit d'un nombre pair et d'un nombre impair, donc c'est un nombre pair. Tout multiple d'un nombre pair est pair, or $3n^4+5n+1$ est impair, donc $3n^4+5n+1$ n'est pas multiple de $n(n+1)$. C'est-à-dire, $n(n+1)\nmid(3n^4+5n+1)$.

Exercice 4

Le reste de la division euclidienne de a par b est 9 donc $a=bq+9$ (q étant le quotient de la division euclidienne de a par b). Par ailleurs, $a+b=86$ donc $a=86-b$ et par suite $86-b=bq+9 \Leftrightarrow bq+b=77 \Leftrightarrow b(q+1)=77$. donc $b|77$. Or les diviseurs positifs de 77 sont 1, 7, 11 et 77. Comme $b>9$ (Le reste de la division euclidienne de a par b est 9) et $b<43$ ($b<a$ et $a+b=86$), la seule possibilité est $b=11$ et par suite $a=77$. On vérifie que ces nombres conviennent effectivement.