TS spécialité

corrigé de du D.S. n°2

Exercice 1

1. $n \equiv 2\ (5) \Rightarrow n^2 \equiv 4\ (5) \Rightarrow n^2+1 \equiv 5\ (5) \Leftrightarrow 5 \mid (n^2+1)$ et
$n \equiv 3\ (5) \Rightarrow n^2 \equiv 9\ (5) \Rightarrow n^2+1 \equiv 10\ (5) \Leftrightarrow n^2+1 \equiv 0\ (5) \Leftrightarrow 5 \mid (n^2+1)$. Donc, si $n \equiv 2\ (5)$ ou si $n \equiv 3\ (5)$, alors n^2+1 est multiple de 5.
2. $n(n^4-1) = n(n^2-1)(n^2+1)$.
Quel que soit n, on a $n \equiv 0\ (5)$, $n \equiv 1\ (5)$, $n \equiv 2\ (5)$, $n \equiv 3\ (5)$ ou $n \equiv 4\ (5)$ (on peut par exemple considérer le reste de la division euclidienne de n par 5).
Si $n \equiv 0\ (5)$ alors $5 \mid n$ donc $5 \mid n(n^4-1)$.
Si $n \equiv 2\ (5)$ ou $n \equiv 3\ (5)$ alors $5 \mid (n^2+1)$ donc $5 \mid n(n^4-1)$.
Si $n \equiv 1\ (5)$ alors $n^2-1 \equiv 0\ (5) \Leftrightarrow 5 \mid (n^2-1)$ donc $5 \mid n(n^4-1)$.
Si $n \equiv 4\ (5)$ alors $n \equiv -1\ (5) \Rightarrow n^2-1 \equiv 0\ (5) \Leftrightarrow 5 \mid (n^2-1)$ donc $5 \mid n(n^4-1)$.
Donc, quel que soit n, $5 \mid n(n^4-1)$.

Exercice 2

1.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
reste de la division euclidienne de 2^n par 9	2	4	8	7	5	1	2	4	8

2. $9 \mid (2^n-1) \Leftrightarrow 2^n \equiv 1\ (9)$. On peut écrire $n = 6q+r$ ou q et r sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de n par 6. Donc $2^n = 2^{6q+r} = (2^6)^q \times 2^r$ or $2^6 \equiv 1\ (9)$ donc $2^n \equiv 2^r\ (9)$. Or $r \in \{0;1;2;3;4;5\}$ donc $2^n \equiv 1\ (9) \Leftrightarrow r = 0$ c'est-à dire $6 \mid n$.
Si $6 \mid n$, il existe un entier k tel que $n = 6k$ donc $2^n = (2^6)^k = 64^k$ or $64 \equiv 1\ (63)$ donc $64^k \equiv 1\ (63) \Leftrightarrow 2^n-1 \equiv 0\ (63) \Leftrightarrow 63 \mid (2^n-1)$.

Exercice 3

On remarque que $4^3 = 64 \equiv 1\ (7)$ puis $2012 = 3\times 670+2$ donc $4^{2012} = (4^3)^{670} \times 4^2 \equiv 4^2\ (7) \equiv 2\ (7)$. Le reste de la division euclidienne de 4^{2012} par 7 est donc 2.

Exercice 4

$99 \mid n$ équivaut à $9 \mid n$ et $11 \mid n$ car 9 et 11 sont premiers entre eux. Or, $\overline{12x45y} \equiv 1+2+x+4+5+y\ (9)$ donc $9 \mid \overline{12x45y} \Leftrightarrow 1+2+x+4+5+y \equiv 0\ (9) \Leftrightarrow x+y \equiv 6\ (9)$ et $\overline{12x45y} \equiv -1+2-x+4-5+y\ (11)$ donc $11 \mid \overline{12x45y} \Leftrightarrow -1+2-x+4-5+y \equiv 0\ (11) \Leftrightarrow y-x \equiv 0\ (11)$. Comme x et y sont des entiers compris entre 0 et 9, la dernière condition impose $x = y$. On a alors $2x \equiv 6\ (9)$ ce qui qui laisse comme seule possibilité $x = 3$ le nombre cherché est donc 123453.