TS spécialité

corrigé de du D.S. n°3

1. a.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
reste de la division euclidienne de 5^n par 9	5	7	8	4	2	1	5	7	8

On remarque que $5^6 \equiv 1\ (9)$. On peut écrire $n = 6q+r$ ou q et r sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de n par 6 . Donc $5^n = 5^{6q+r} = (5^6)^q \times 5^r$ or $5^6 \equiv 1\ (9)$ donc $5^n \equiv 5^r\ (9)$. Or $r \in \{0;1;2;3;4;5\}$ donc le tableau précédent répond au problème.

b. $2012 = 9\times223+5$ donc $2012 \equiv 5\ (9)$ et donc $(2012)^{2012} \equiv 5^{2012}\ (9)$. Or $2012 \equiv 2\ (6)$ donc $5^{2012} \equiv 5^2\ (9) \equiv 7\ (9)$.

2. a. $10 \equiv 1\ (9)$ Donc Quel que soit l'entier n strictement positif, $(10)^n \equiv 1^n\ (9) \equiv 1\ (9)$.

b. Posons $N = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0}$ l'écriture décimale de N . On a alors $N = \sum_{i=0}^{k} a_i 10^i$. Or, pour tout entier naturel i , $(10)^i \equiv 1\ (9)$ (la relation est triviale pour $i = 0$) donc $\sum_{i=0}^{k} a_i 10^i \equiv \sum_{i=0}^{k} a_i\ (9)$ c'est-à-dire, $N \equiv S(9)$.

c. $N \equiv S(9)$ donc $9 | N \Leftrightarrow N \equiv 0\ (9) \Leftrightarrow S \equiv 0\ (9) \Leftrightarrow 9 | S$.

3. a. D'après la question 2.b, $A \equiv B(9)$, $B \equiv C(9)$ et $C \equiv D(9)$ donc $A \equiv D(9)$.

b. $2012<10000$ donc $(2012)^{2012} < (10000)^{2012}$. $(10000)^{2012} = (10^4)^{2012} = 10^{8048}$. 10^{8048} est le plus petit entier s'écrivant avec 8049 chiffres et $(2012)^{2012} < 10^{8048}$ donc $(2012)^{2012}$ s'écrit avec au plus 8048 chiffres. Tous les chiffres sont inférieurs ou égaux à 9, donc la somme des chiffres d'un nombre qui en comporte au plus 8048 est inférieure ou égale à $9\times8048 = 72432$. Donc $B \leq 72432$.

c. $B \leq 72432$ donc B a au plus 5 chiffres et la somme de ses chiffres est inférieure à 9×5 donc $C \leq 45$.