TS spécialité

exo type bac

Soit a, b, c et d quatre réels ().

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}-\left\{-\frac{d}{c}\right\}$ par $f(x)=\frac{a\,x+b}{c\,x+d}$. et A la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$.

(On suppose que pour tout entier naturel n, $u_n \neq -\frac{d}{c}$)

Partie I

1. Que peut-on dire de la suite (u_n) si $c=0$? Si $ad-bc=0$?
   On suppose par la suite que $c \neq 0$ et $ad-bc \neq 0$.
2. Exprimer u_1 puis u_2 en fonction de u_0 et des nombres a, b, c et d.
3. On définit la suite de matrices-colonne $X_n=\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$ par $X_0=\begin{pmatrix} u_0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $X_{n+1}=A \times X_n$. Calculer X_1 et X_2. Que constate-t-on par rapport aux résultats de la question précédente.
4. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n=A^n \times X_0$ et qu'on a $u_n=\frac{p_n}{q_n}$.

Partie II

Dans cette partie, on prendra $a=4$, $b=-6$, $c=3$, $d=-5$ et $u_0=5$.

L'objectif de cette partie est de déterminer une forme explicite des termes de la suite (u_n) et d'étudier la convergence de cette suite.

1. A l'aide de la calculatrice, calculer les valeurs exactes ou approchées au millième des cinq premiers termes de la suite (u_n).
2. Posons $P=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   - **a.** Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   - **b.** Démontrer que la matrice $D=P^{-1} \times A \times P$ est une matrice diagonale dont on donnera les coefficients.
   - **c.** En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n=P \times D^n \times P^{-1}$. Donner les coefficients de D^n puis de A^n en fonction de n.
3. Déduire de la partie I et de la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
   $X_n=\begin{pmatrix} -3\times(-2)^n+8 \\ -3\times(-2)^n+4 \end{pmatrix}$.
4. Donner l'expression de u_n en fonction de n puis montrer que (u_n) converge vers 1.