TS spécialité

corrigé de du Type Bac n°1

Partie I

1. Si $c = 0$, $u_{n+1} = \frac{a}{d}u_n+\frac{b}{d}$ donc (u_n) est une suite arithmético-géometrique.

   Si $ad-bc = 0$ alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ donc $u_{n+1} = \frac{a(u_n+\frac{b}{a})}{c(u_n+\frac{d}{c})} = \frac{a(u_n+\frac{b}{a})}{c(u_n+\frac{a}{b})} = \frac{a}{c}$. Donc (u_n) est une suite constante, au moins à partir du rang 1.

2. $u_1 = \frac{a\,u_0+b}{c\,u_0+d}$

   $u_2 = \frac{a\,u_1+b}{c\,u_1+d} = \frac{a\frac{a\,u_0+b}{c\,u_0+d}+b}{c\frac{a\,u_0+b}{c\,u_0+d}+d} = \frac{(a^2+bc)u_0+ab+bd}{(ac+cd)u_0+bc+d^2}$.

3. $X_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\times X_0 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} u_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,u_0+b \\ c\,u_0+d \end{pmatrix}$

   $X_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\times X_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} a\,u_0+b \\ c\,u_0+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a^2+bc)u_0+ab+bd \\ (ac+cd)u_0+bc+d^2 \end{pmatrix}$

   On constate que $u_1 = \frac{p_1}{q_1}$ et $u_2 = \frac{p_2}{q_2}$.

4. Soit P_n la proposition : $X_n = A^n\times X_0$.
   $A^0\times X_0 = Id_2\times X_0 = X_0$ donc P_0 est vraie.
   Supposons La proposition vraie au rang p , c'est-à-dire $X_p = A^p\times X_0$, alors
   $X_{p+1} = A\times X_p = A\times A^p\times X_0 = A^{p+1}\times X_0$ donc la proposition est vraie au rang $p+1$ et on peut conclure que pour tout n , $X_n = A^n\times X_0$.
   Soit P_n la proposition : $u_n = \frac{p_n}{q_n}$.

   $p_0 = u_0$ et $q_0 = 1$ donc $u_0 = \frac{p_0}{q_0}$ et P_0 est vraie.
   Supposons La proposition vraie au rang p , c'est-à-dire , alors, d'une part,
   $\begin{pmatrix} p_{p+1} \\ q_{p+1} \end{pmatrix} = X_{p+1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\times X_p = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} p_p \\ q_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,p_p+b\,q_p \\ c\,u_p+d\,q_p \end{pmatrix}$, d'autre part

   $u_{p+1} = f(u_p) = \frac{a\,u_p+b}{c\,u_p+d}$. Or d'après l'hypothèse de récurrence, $u_p = \frac{p_p}{q_p}$ donc

   $u_{p+1} = \frac{a\frac{p_p}{q_p}+b}{c\frac{p_p}{q_p}+d} = \frac{a\,p_p+b\,q_p}{c\,p_p+d\,q_p} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ donc la proposition est vraie au rang $p+1$ et on peut conclure que pour tout n , $u_n = \frac{p_n}{q_n}$.

Partie II

1. $u_0 = 5$, $u_1 = \dfrac{14}{10} = 1{,}4$, $u_2 = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$, $u_3 = \dfrac{8}{7} \approx 1{,}143$, $u_4 = \dfrac{10}{11} = 0{,}909$.

2. a. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id_2$ donc P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
   b. $D = P^{-1} \times A \times P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
   Donc D est bien une matrice diagonale.
   c. Soit P_n la proposition : $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$.
   $A^0 = Id_2$ et $P \times D^0 \times P^{-1} = P \times Id_2 \times P^{-1} = Id_2$ donc P_0 est vraie.
   Supposons La proposition vraie au rang p , c'est-à-dire $A^p = P \times D^p \times P^{-1}$, alors
   $A^{p+1} = A \times P \times D^p \times P^{-1}$ donc $P^{-1} \times A^{p+1} = P^{-1} \times A \times P \times D^p \times P^{-1} = D \times D^p \times P^{-1} = D^{p+1} \times P^{-1}$
   puis $P \times P^{-1} \times A^{p+1} = P \times D^{p+1} \times P^{-1}$ c'est-à-dire $A^{p+1} = P \times D^{p+1} \times P^{-1}$ donc la proposition est vraie au rang $p+1$ et on peut conclure que pour tout n , $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$.
   D est une matrice diagonale donc $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$ puis
   $A^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & (-2)^n \\ 1 & (-2)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-(-2)^n & -2+2\times(-2)^n \\ 1-(-2)^n & -1+2\times(-2)^n \end{pmatrix}$.

3. On sait que $X_n = A^n \times X_0$ donc $X_n = \begin{pmatrix} 2-(-2)^n & -2+2\times(-2)^n \\ 1-(-2)^n & -1+2\times(-2)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-3\times(-2)^n \\ 4-3\times(-2)^n \end{pmatrix}$.

4. $u_n = \dfrac{p_n}{q_n} = \dfrac{8-3\times(-2)^n}{4-3\times(-2)^n}$.
   $\dfrac{8-3\times(-2)^n}{4-3\times(-2)^n} = \dfrac{(-2)^n\left(\dfrac{8}{(-2)^n}-3\right)}{(-2)^n\left(\dfrac{4}{(-2)^n}-3\right)} = \dfrac{8\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n-3}{4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n-3}$. Or $\left|-\dfrac{1}{2}\right| < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ et par suite
   $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{-3}{-3} = 1$.