TS spécialité

corrigé de du Type Bac n°2

Proposition 1

Pour tout entier naturel n,

$4\equiv 1(3) \Rightarrow 4^n\equiv 1(3) \Leftrightarrow (2^2)^n\equiv 1(3) \Leftrightarrow 2^{2n}\equiv 1(3) \Leftrightarrow 2^{2n}-1\equiv 0(3) \Leftrightarrow 3|(2^{2n}-1)$.

Donc la proposition 1 est vraie.

Proposition 2

$2^2+2=6$ et $6\equiv 0(6)$ mais 2 n'est pas congru à 0 modulo 3. Donc la proposition 2 est fausse.

Proposition 3

On remarque que le couple $(4+5\ ;12+9)$ c'est-à-dire $(9;21)$ est solution de l'équation $12x-5y=3$.

$9=4+10k \Leftrightarrow k=\frac{1}{2}$ donc le couple $(9;21)$ n'appartient pas à l'ensemble proposé et les 2 ensembles ne coïncident donc pas. La proposition 3 est fausse.

Proposition 4

Quels que soient les entiers naturels a et b tels que $a<b$, on a $PGCD(a,b)\leq a<b\leq PPCM(a,b)$. On a donc $b-a=1$ ce qui prouve que a et b sont premier entre eux ($PGCD(a,b)|1$ donc $PGCD(a,b)=1$). Par suite, $PPCM(a,b)=2$ et finalement $a=1$ et $b=2$. La proposition 4 est vraie.

Proposition 5

$M=100a+10b+c$ et $N=100b+10c+a$ donc $M-N=99a-90b-9c=9(11a-10b-c)$. Or $11\equiv -1(3)$ et $-10\equiv -1(3)$ donc $11a-10b-c\equiv -a-b-c(3)\equiv -(a+b+c)(3)$. On sait que $27|M$ donc $3|M$ et donc $a+b+c\equiv 0(3)$. Par suite, $11a-10b-c\equiv 0(3) \Leftrightarrow 3|(11a-10b-c)$ et donc $27|9(11a-10b-c) \Leftrightarrow 27|(M-N)$. Donc la proposition 5 est vraie.