TS spécialité

Type bac n°3

Soit A l'ensemble des entiers naturels de l'intervalle $[1;46]$.

1. On considère l'équation (E) $23x+47y=1$ où x et y sont des entiers relatifs.
   a. Donner une solution particulière $(x_0\ ;\ y_0)$ de (E).
   b. Déterminer l'ensemble des couples $(x\ ;\ y)$ solutions de (E).
   c. En déduire qu'il existe un unique entier x appartenant à A tel que $23x \equiv 1(47)$.

2. Soient a et b deux entiers relatifs.
   a. Montrer que si $ab \equiv 0(47)$ alors $a \equiv 0(47)$ ou $b \equiv 0(47)$.
   b. En déduire que si $a^2 \equiv 1(47)$ alors $a \equiv 1(47)$ ou $a \equiv -1(47)$.

3.
   a. Montrer que pour tout entier p de A, il existe un entier relatif q tel que $p\times q \equiv 1(47)$.
   Pour la suite, on admet que pour tout entier p de A, il existe un unique entier, noté $inv(p)$, appartenant à A tel que $p\times inv(p) \equiv 1(47)$.
   Par exemple :
   $inv(1)=1$ car $1\times1 \equiv 1(47)$, $inv(2)=24$ car $2\times24 \equiv 1(47)$ et $inv(3)=16$ car $3\times16 \equiv 1(47)$.
   b. Quels sont les entiers p de A qui vérifient $p = inv(p)$?
   c. Montrer que $46! \equiv -1\ (47)$.