TS spécialité

corrigé de du Type Bac n°2

1. a. On peut prendre $(-2;1)$ car $-2\times 23+1\times 47=1$
   b. $23x+47y=1 \Leftrightarrow 23x+47y=-2\times 23+1\times 47 \Leftrightarrow 23(x+2)=-47(y-1)$
   Cette dernière équation implique $47\mid 23(x+2)$ or 47 et 23 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss $47\mid(x+2)$ et il existe un entier k tel que $x+2=47k \Leftrightarrow x=-2+47k$. En remplaçant dans l'équation précédente, on obtient $23(47k)=-47(y-1) \Leftrightarrow y=1-23k$. On vérifie immédiatement que quel que soit l'entier k, le couple $(-2+47k;1-23k)$ est solution de (E). C'est donc l'ensemble cherché.
   c. $23x\equiv 1(47)$ équivaut à : Il existe un entier k tel que $23x=1+47k \Leftrightarrow 23x+47(-k)=1$
   Donc d'après la question précédente $x=-2+47k'$. On cherche $0<x<47$ ce qui amène à $k'=1$ et donc $x=45$.

2. a. 47 est premier, donc soit $47\mid b$ et $b\equiv 0(47)$, soit $47\nmid b$ et 47 est premier avec b. Dans ce cas, si $ab\equiv 0(47)$ c'est-à-dire si $47\mid ab$ alors, d'après le théorème de Gauss, $47\mid a$ et $a\equiv 0(47)$.
   Donc si $ab\equiv 0(47)$ alors soit $b\equiv 0(47)$ soit $a\equiv 0(47)$.
   b. $a^2\equiv 1(47) \Leftrightarrow a^2-1\equiv 0(47) \Leftrightarrow (a-1)(a+1)\equiv 0(47)$ D'après la question précédente, soit $(a-1)\equiv 0(47) \Leftrightarrow a\equiv 1(47)$ soit $(a+1)\equiv 0(47) \Leftrightarrow a\equiv -1(47)$.

3. a. $pq\equiv 1(47)$ équivaut à : Il existe un entier k tel que $pq=1+47k \Leftrightarrow pq+47(-k)=1$ .Or $p\in A$ donc p est premier avec 47 et d'après le théorème de Bézout, il existe q et k tels que l'égalité soit vérifiée, ce qui répond à la question.
   b. $p\times inv(p)\equiv 1(47)$ donc $p=inv(p) \Leftrightarrow p^2\equiv 1(47)$ donc $p\equiv 1(47) \Leftrightarrow p=1$ ou $p\equiv -1(47) \Leftrightarrow p=46$.
   c. A l'exception de 1 et 46, tous les éléments p de A ont un unique inverse distinct d'eux d'eux-même.L'ensemble $A\setminus\{1;46\}$ est donc formé de 22 paires de nombres $(a_i;inv(a_i))$ et donc, $46!=1\times a_1\times inv(a_1)\times\ldots\times a_{22}\times inv(a_{22})\times 46$. Par suite, $46!\equiv 1\times 1\times\ldots\times 1\times -1(47)\equiv -1(47)$.