TS spécialité

exo type bac 4

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et T la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ est une suite de matrices telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = A \times U_n$. De plus, x_0 et y_0 sont des entiers relatifs.

1. Monter que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n \times U_0$.

2. a. Déterminer T^{-1} puis montrer que $D = T \times A \times T^{-1}$ est une matrice diagonale.
   b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = T^{-1} \times D^n \times T$.
   c. Déterminer l'expression de A^n en fonction de n.
   d. Montrer que $y_n = (2^n - 3^n) x_0 + (2^{n+1} - 3^n) y_0$ et donner l'expression de x_n en fonction de n, x_0 et y_0.

3. Dans cette question, on choisit $x_0 = 1$ et $y_0 = 1$. Déterminer le reste de la division euclidienne de y_{2013} par 5.

4. a. On admet que pour tout entier $n > 0$, $2^n - 3^n$ et $2^{n+1} - 3^n$ sont premiers entre eux. Montrer que pour tout entier relatif a et pour tout entier naturel n, on peut choisir x_0 et y_0 de telle sorte que $y_n = a$.
   b. Application : Déterminer des valeurs de x_0 et y_0 telles que $y_3 = 1$.

5. Question bonus : Démontrer la propriété admise en 4.a.