TS spécialité

corrigé de du Type Bac n°4

1. Soit P_n la proposition : $U_n = A^n \times U_0$.
   $A^0 \times U_0 = Id_2 \times U_0 = U_0$ donc P_0 est vraie.
   Supposons La proposition vraie au rang p , c'est-à-dire $U_p = A^p \times U_0$, alors
   $U_{p+1} = A \times U_p = A \times A^p \times U_0 = A^{p+1} \times U_0$ donc la proposition est vraie au rang $p+1$ et on peut conclure que pour tout n , $U_n = A^n \times U_0$.

2. a. $T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ puis $D = T \times A \times T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ donc D est une matrice diagonale.
   b. Soit P_n la proposition : $A^n = T^{-1} \times D^n \times T$.
   $A^0 = Id_2$ et $T^{-1} \times D^0 \times T = T^{-1} \times Id_2 \times T = Id_2$ donc P_0 est vraie.
   Supposons La proposition vraie au rang p , c'est-à-dire $A^p = T^{-1} \times D^p \times T$, alors
   $A^{p+1} = A \times T^{-1} \times D^p \times T$ donc $T \times A^{p+1} = T \times A \times T^{-1} \times D^p \times T = D \times D^p \times T = D^{p+1} \times T$ puis
   $T^{-1} \times T \times A^{p+1} = T^{-1} \times D^{p+1} \times T$ c'est -à-dire $A^{p+1} = T^{-1} \times D^{p+1} \times T$ donc la proposition est vraie au rang $p+1$ et on peut conclure que pour tout n , $A^n = T^{-1} \times D^n \times T$.
   c. D est une matrice diagonale donc $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ et par suite,
   $A^n = T^{-1} \times D^n \times T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^n & 2\times 3^n \\ 2^n & -3^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
   $= \begin{pmatrix} -2^n+2\times 3^n & -2^{n+1}+2\times 3^n \\ 2^n-3^n & 2^{n+1}-3^n \end{pmatrix}$
   d. $U_n = A^n \times U_0$ et on a donc $x_n = (-2^n+2\times 3^n)x_0+(-2^{n+1}+2\times 3^n)y_0$ et
   $y_n = (2^n-3^n)x_0+(2^{n+1}-3^n)y_0$.

3. $y_{2013} = 2^{2013}-3^{2013}+2^{2014}-3^{2013} = 3\times 2^{2013}-2\times 3^{2013}$. Or $2013 = 4\times 503+1$ donc $2^{2013} = 2\times (2^4)^{503}$ et comme $2^4 = 16 \equiv 1\ (5)$ on obtient $2^{2013} \equiv 2\ (5)$. De même, $3^4 = 81 \equiv 1\ (5)$ donc
   $3^{2013} \equiv 3\ (5)$ et par suite, $y_{2013} \equiv 0\ (5)$ donc le reste cherché est 0 .

4. a. 2^n-3^n et $2^{n+1}-3^n$ sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers relatif u et v tels que $(2^n-3^n)u+(2^{n+1}-3^n)v = 1$. Il suffit alors de choisir $x_0 = au$ et $y_0 = av$ pour prouver le résultat cherché.
   b. $2^3-3^3 = 8-27 = -19$ et $2^4-3^3 = 16-27 = -11$. On cherche alors x_0 et y_0 tels que $-19x_0-11y_0 = 1$. On a $-19 = 2\times(-11)+3$ et $-11 = -4\times 3+1$ donc
   $1 = -11+4\times 3 = -11+4\times(-19-2\times(-11)) = 4\times(-19)-7\times(-11)$ on peut donc choisir $x_0 = 4$ et $y_0 = -7$ pour obtenir $y_3 = 1$.

   Question bonus :
   Soit d un diviseur positif commun de 2^n-3^n et de $2^{n+1}-3^n$. On a alors, pour tout entier n,
   $d \mid (2^{n+1}-3^n-2^n-3^n) \Leftrightarrow d \mid 2^n$ et $d \mid (2\times(2^n-3^n)-2^{n+1}-3^n) \Leftrightarrow d \mid 3^n$ et donc $d = 1$ et 2^n-3^n et $2^{n+1}-3^n$ sont premiers entre eux.