TS spécialité

corrigé de du D.S. n°1

Exercice 1

1. $1212 = 5 \times 235 + 37$.
2. a. Si $n \mid 1212$ et $n \mid 235$ alors $n \mid (1212 - 5 \times 235)$ c'est-à-dire, $n \mid 37$.

   b. Si d est un diviseur positif commun de 1212 et 235 , alors c'est un diviseur de 37 . Or 37 est premier, donc $d = 1$ ou $d = 37$. $37 \nmid 235$ donc 1 est le seul diviseur positif commun à 1212 et 235 .
3. $1212 = 2 \times 425 + 362$, $425 = 362 + 63$ et $362 = 5 \times 63 + 47$. De la même façon qu'à la question précédente, un diviseur commun de 12 et 425 est un diviseur de 47 , Or 47 est premier et ne divise pas 425 donc 1212 et 425 sont premiers entre eux.

Exercice 2

$n^2 - m^2 = 15 \Leftrightarrow (n-m)(n+m) = 15$. n et m sont des entiers positifs, donc $n > m$ et $n+m > n-m$. Les diviseurs de 15 sont 1, 3, 5 et 15, on a donc deux possibilités, $n+m = 15$ et $n-m = 1$ d'une part, $n+m = 5$ et $n-m = 3$ d'autre part. La première possibilité donne $n = 8$ et $m = 7$ et la seconde donne $n = 4$ et $m = 1$.

Exercice 3

1. $n^3 - n^2 = n^2(n-1)$ donc $n-1 \mid n^3 - n^2$ et $n^2 - 1 = (n+1)(n-1)$ donc $n-1 \mid n^2 - 1$.

   $n-1 \mid n^3 - n^2$ et $n-1 \mid n^2 - 1$ donc $n-1 \mid n^3 - n^2 + n^2 - 1 \Leftrightarrow n-1 \mid n^3 - 1$.
2. $n^3 - n^2 = n^2(n-1)$ et $n^2 - 1 = (n+1)(n-1)$ donc $n^3 - n^2 + n^2 - 1 = n^2(n-1) + (n+1)(n-1)$ et donc $n^3 - 1 = (n^2 + n + 1)(n-1)$.

Exercice 4

$a \equiv 34(23)$ donc $a \equiv 34 - 23(23) \Leftrightarrow a \equiv 11(23)$. Comme $0 \leq 11 < 23$, le reste cherché est 11 .

$b \equiv 29(46)$ donc $b \equiv 29(23)$ puis $b \equiv 6(23)$. Le reste cherché est donc 6 .

Exercice 5

1. Soit d un diviseur commun de a et b , d est donc un diviseur de $a-b$ et de $a+b$. Or $a+b$ et $a-b$ sont premiers entre eux, donc $d = 1$ ou $d = -1$ et donc, a et b sont premiers entre eux.
2. La réciproque est fausse, 5 et 3 sont premiers entre eux mais 8 et 2 ne le sont pas.

Exercice 6

1. $(n+1)^2 = (n+4)(n-2) + 9$ donc si $n+4 > 9 \Leftrightarrow n > 5$, le reste de la division euclidienne de $(n+1)^2$ par $n+4$ est 9 . Pour les autres valeurs on obtient : $n = 0 \Rightarrow r = 1$, $n = 1 \Rightarrow r = 4$, $n = 2 \Rightarrow r = 3$, $n = 3 \Rightarrow r = 2$, $n = 4 \Rightarrow r = 1$ et $n = 5 \Rightarrow r = 0$.
2. $n^2 + 2 = (n+1)(n-1) + 3$ donc si $n+1 > 3 \Leftrightarrow n > 2$, le reste de la division euclidienne de $n^2 + 2$ par $n+1$ est 3 . Pour les autres valeurs on obtient : $n = 0 \Rightarrow r = 0$, $n = 1 \Rightarrow r = 1$ et $n = 2 \Rightarrow r = 0$.