TS spécialité

corrigé de du D.S. n°2

Exercice 1

1. $u_2 = 5\times1-4\times0 = 5$; $u_3 = 5\times5-4\times1 = 21$; $u_4 = 5\times21-4\times5 = 85$.
2. a. Soit P_n la proposition : $u_{n+1} = 4u_n+1$.

   $4u_0+1 = 4\times0+1 = 1 = u_1$ donc P_0 est vraie.

   Supposons La proposition vraie au rang p , c'est-à-dire $u_{p+1} = 4u_p+1$ donc $4u_p = u_{p+1}-1$, alors $u_{p+2} = 5u_{p+1}-4u_p = 5u_{p+1}-(u_{p+1}-1) = 4u_{p+1}+1$ donc la proposition est vraie au rang $p+1$ et on peut conclure que pour tout n , $u_{n+1} = 4u_n+1$.

   b. Soit P_n la proposition : u_n est un entier naturel. $u_0 = 0$ donc P_0 est vraie.

   Supposons La proposition vraie au rang p , c'est-à-dire u_p est un entier naturel, alors $u_{p+1} = 4u_p+1$ est aussi un entier naturel donc la proposition est vraie au rang $p+1$ et on peut conclure que pour tout n , u_n est un entier naturel.

   c. Soit d un diviseur positif commun de u_n et u_{n+1} . d est donc un diviseur de $u_{n+1}-4u_n$. Or $u_{n+1}-4u_n = 1$, donc $d = 1$ et u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux.

Exercice 2

1. Considérons le tableau suivant :

reste de la division de x par 7	0	1	2	3	4	5	6
reste de la division de x^2 par 7	0	1	4	2	2	4	1

3 n'apparaît pas dans les restes de la division euclidienne de x^2 par 7 donc l'équation $x^2 \equiv 3(7)$ n'a pas de solution.

2. Considérons le tableau suivant donnant le reste de la division de a^2+b^2 par 7 en fonction des restes des divisions de a et b par 7 :

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	4	2	2	4	1
1	1	2	5	3	3	5	2
2	4	5	1	6	6	1	5
3	2	3	6	4	4	6	3
4	2	3	6	4	4	6	3
5	4	5	1	6	6	1	5
6	1	2	5	3	3	5	2

Or, $7|(a^2+b^2)$ équivaut à dire que le reste de la division euclidienne de $7|(a^2+b^2)$ par 7 est nul et on voit que ce n'est possible que si a et b sont divisibles par 7 .

Exercice 3

$3 \equiv 0(3)$ donc $3u \equiv 0(3)$, $13 \equiv 1(3)$ donc $13v \equiv v(3)$ et $23 \equiv -1(3)$ donc $23w \equiv -w(3)$.

Donc $3u+13v+23w = 0 \Rightarrow 3u+13v+23w \equiv 0(3) \Rightarrow v-w \equiv 0(3) \Rightarrow v \equiv w(3)$.