TS spécialité Mercredi 18 décembre 2013

Devoir surveillé n°3

Exercice 1 (3 points)

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n et I_n la matrice identité d'ordre n.
Développer et simplifier les produits suivants, en considérant d'abord A et B quelconques puis en considérant A et B qui commutent (c'est-à-dire tels que $AB = BA$)

1. $(-A+3B)(3A-B)$
2. $(3A-B)^2$

Exercice 2 (6 points)

On considère le système (S) suivant : $\begin{cases} 5x-3z=-4 \\ 3x+4y+z=2 \\ x-y-z=2 \end{cases}$

1. Écrire ce système sous la forme d'une égalité matricielle du type $AX = B$ en précisant les matrices A, B et X.
2. Justifier que A est inversible et déterminer A^{-1} (On ne demande pas les détails du calcul)
3. Résoudre le système (S).

Exercice 3 (8 points)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ et la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3.
2. a. Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1}.
   b. Montrer que $D = P^{-1}AP$ est une matrice diagonale.
   c. Montrer que $A = PDP^{-1}$.
3. Démontrer que pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$ et en déduire l'expression de A^n en fonction de n.

Exercice 4 (3 points)

Pour tout réel x, on pose $M_x = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$.

Montrer que pour tous réels a et b, $M_aM_b = M_{a+b}$.

Exercice 5 (bonus)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice carrée B d'ordre 2 telle que $AB = BA$.