TS spécialité

Corrigé du D.S. n°3

Exercice 1

Si A et B ne commutent pas

1. $(-A+3B)(3A-B)=-3A^2+AB+9BA-3B^2$
2. $(3A-B)^2=(3A-B)(3A-B)=9A^2-3AB-3BA+B^2$

Si A et B commutent

1. $(-A+3B)(3A-B)=-3A^2+AB+9AB-3B^2=-3A^2+10AB-3B^2$
2. $(3A-B)^2=9A^2-3AB-3AB+B^2=9A^2-6AB+B^2$

Exercice 2

1. $\begin{cases}5x-3z=-4\\3x+4y+z=2\\x-y-z=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}5&0&-3\\3&4&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\2\\2\end{pmatrix}$ c'est-à-dire $AX=B$ avec $A=\begin{pmatrix}5&0&-3\\3&4&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-4\\2\\2\end{pmatrix}$.
2. On a $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&2\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{7}{3}\\-\frac{7}{6}&\frac{5}{6}&\frac{10}{3}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}5&0&-3\\3&4&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ donc A est inversible et $A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&2\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{7}{3}\\-\frac{7}{6}&\frac{5}{6}&\frac{10}{3}\end{pmatrix}$.
3. $AX=B \Rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}B \Leftrightarrow X=A^{-1}B$ donc $X=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&2\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{7}{3}\\-\frac{7}{6}&\frac{5}{6}&\frac{10}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-8\\13\end{pmatrix}$. On verifie que cette solution convient et on a donc $x=7$, $y=-8$ et $z=13$.

Exercice 3

1. $A^2=\begin{pmatrix}7&3\\-6&-2\end{pmatrix}$ et $A^3=\begin{pmatrix}15&7\\-14&-6\end{pmatrix}$.
2. a. $\begin{pmatrix}2&1\\-1&-1\end{pmatrix}\times P=\begin{pmatrix}2&1\\-1&-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&1\\-1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ donc P est inversible et $P^{-1}=\begin{pmatrix}2&1\\-1&-1\end{pmatrix}$.

   b. $D=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&1\\-1&-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3&1\\-2&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&1\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$. D est bien une matrice diagonale.

   c. $A=I_2AI_2=PP^{-1}APP^{-1}=PDP^{-1}$.
3. Soit (P_n) la proposition : $A^n=PD^nP^{-1}$.
   $A^0=I_2$ et $PD^0P^{-1}=PI_2P^{-1}=I_2$ donc (P_0) est vraie.
   Supposons (P_k) vraie, c'est-à-dire $A^k=PD^kP^{-1}$. On a alors :
   $A^{k+1}=A^kA=PD^kP^{-1}PDP^{-1}=PD^kDP^{-1}=PD^{k+1}P^{-1}$ donc (P_{k+1}) est vraie et on peut donc dire que (P_n) est vraie pour tout entier n.

D est une matrice diagonale, donc $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis

$$A^n = P\,D^n\,P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 1 \\ -2^n & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 \\ -2^{n+1}+2 & -2^n+2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

$M_a = \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix}$ et $M_b = \begin{pmatrix} \cos b & \sin b \\ -\sin b & \cos b \end{pmatrix}$ donc

$$M_a M_b = \begin{pmatrix} \cos a \cos b - \sin a \sin b & \cos a \sin b + \sin a \cos b \\ -\sin a \cos b - \cos a \sin b & -\sin a \sin b + \cos a \cos b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(a+b) & \sin(a+b) \\ -\sin(a+b) & \cos(a+b) \end{pmatrix} = M_{a+b}$$

Exercice 5

Remarquons que les matrices I_2, A et A^{-1} (A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$) sont des solutions « évidentes » au problème (de même que O_2 mais elle n'est pas inversible).

Cherchons l'ensemble des matrice carrées d'ordre 2 ayant cette propriété. On cherche les matrices $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ telles que $AB = BA$. Or $AB = \begin{pmatrix} x-z & y-t \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} x+2y & -x \\ z+2t & -z \end{pmatrix}$, il s'agit donc de résoudre le système :

$$\begin{cases} x-z = x+2y \\ y-t = -x \\ 2x = z+2t \\ 2y = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2y \\ t = x+y \\ z = 2x-2t \\ z = -2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2y \\ t = x+y \\ z = -2y \\ z = -2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2y \\ t = x+y \end{cases}$$

. Tout choix de x et y donne donc une matrice qui commute avec A. Les choix des couples $(1;0)$, $(1\,;-1)$ et $(0;\frac{1}{2})$ donnent bien les matrices respectives I_2, A et A^{-1}.