TS spécialité Mercredi 22 janvier 2013

Devoir surveillé n°4

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 8$ et, pour tout n supérieur ou égal à 0 : $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.

1. Calculer u_2 et u_3 .
2. Pour tout entier naturel n, on souhaite calculer u_n à l'aide de l'algorithme suivant :

Variables :	a , b et c sont des nombres réels i et n sont des nombres entiers naturels supérieurs ou égaux à 2
Initialisation :	a prend la valeur 3 b prend la valeur 8

Traitement :	Saisir n
	Pour i variant de 2 à n faire
	    c prend la valeur a
	    a prend la valeur b
	    b prend la valeur . . .
	Fin Pour

Sortie :	Afficher b

a. Recopier la ligne de cet algorithme comportant des pointillés et les compléter.
On obtient avec cet algorithme le tableau de valeurs suivant :

n	7	8	9	10	11	12	13	14	15
u_n	4 502	13 378	39 878	119 122	356 342	1 066 978	3 196 838	9 582 322	28 730 582

b. Quelle conjecture peut-on émettre concernant la monotonie de la suite (u_n) ?

3. Pour tout entier naturel n , on note C_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$
On note A la matrice carrée d'ordre 2 telle que, pour tout entier naturel n , $C_{n+1} = AC_n$.
Déterminer A et prouver que, pour tout entier naturel n , $C_n = A^n C_0$.
4. Soient $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
Calculer QP .
On admet que $A = PDQ$.
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n , $A^n = PD^nQ$.
5. À l'aide des questions précédentes, on peut établir le résultat suivant, que l'on admet.
Pour tout entier naturel non nul n , $A^n = \begin{pmatrix} -2^{n+1}+3^{n+1} & 3\times2^{n+1}-2\times3^{n+1} \\ -2^n+3^n & 3\times2^n-2\times3^n \end{pmatrix}$
En déduire une expression de u_n en fonction de n .
La suite (u_n) a-t-elle une limite ?