TS spécialité

Corrigé du D.S. n°4

1. $u_2 = 5u_1 - 6u_0 = 22$

   $u_3 = 5u_2 - 6u_1 = 62$

2. a. b prend la valeur $5a-6c$ ($5b-6c$ convient aussi)

   b. Il semble que la suite (u_n) soit croissante.

3. $C_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ et on a $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ et $u_{n+1} = 1u_{n+1} - 0u_n$ donc $C_{n+1} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} C_n$ et donc

   $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   Soit P_n la proposition : $C_n = A^n C_0$.

   $A^0 C_0 = Id_2 C_0 = C_0$ donc P_0 est vraie.

   Supposons La proposition vraie au rang p , c'est-à-dire $C_p = A^p C_0$, alors

   $C_{p+1} = A C_p = A A^p C_0 = A^{p+1} C_0$ donc la proposition est vraie au rang $p+1$ et on peut conclure que pour tout n , $C_n = A^n C_0$.

4. $QP = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

   Soit P_n la proposition : $A^n = P D^n Q$.

   $A^1 = A$ et $P D^1 Q = P D Q = A$ donc P_1 est vraie.

   Supposons La proposition vraie au rang p , c'est-à-dire $A^p = P D^p Q$, alors

   $A^{p+1} = A P D^p Q = P D Q P D^p Q = P D I_2 D^p Q = P D D^p Q = P D^{p+1} Q$ donc la proposition est vraie au rang $p+1$ et on peut conclure que pour tout n , $A^n = P D^n Q$.

5. $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = C_n = A^n C_0 = \begin{pmatrix} -2^{n+1}+3^{n+1} & 3\times 2^{n+1} - 2\times 3^{n+1} \\ -2^n+3^n & 3\times 2^n - 2\times 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8\left(-2^{n+1}+3^{n+1}\right)+3\left(3\times 2^{n+1}-2\times 3^{n+1}\right) \\ 8\left(-2^n+3^n\right)+3\left(3\times 2^n - 2\times 3^n\right) \end{pmatrix}$

   donc $u_n = 8\left(-2^n+3^n\right)+3\left(3\times 2^n-2\times 3^n\right) = 2^n + 2\times 3^n$.

   $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = \lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et (u_n) diverge.