Type Bac n°1, Exercice de Spécialité

Toutes les questions de cet exercice peuvent, dans leur quasi-totalité, être traitées de façon indépendante.

1. **Cette question constitue une restitution organisée de connaissances**.

Prérequis : pour deux entiers relatifs a et b, on dit que a est congru à b modulo 7, et on écrit $a \equiv b(7)$ lorsqu'il existe un entier relatif k tel que $a = b+7k$.

   a. Soient a, b, c et d des entiers relatifs.
   Démontrer que : si $a \equiv b(7)$ et $c \equiv d(7)$ alors $ac \equiv bd(7)$.
   b. En déduire que : pour a et b entiers relatifs non nuls
   si $a \equiv b(7)$ alors pour tout entier naturel n, $a^n \equiv b^n(7)$.

2. Soit a un entier naturel non divisible par 7.
   On appelle **ordre de a** modulo 7, et on désigne par k, le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1(7)$.
   a. Montrer que l'ordre de 2 est 3 puis que l'ordre de 3 est 6.
   b. Écrire un algorithme qui, pour un entier a compris entre 2 et 6 donné, renvoie son ordre modulo 7.
   c. Programmer cet algorithme à l'aide d'une calculatrice, puis exécuter le pour les 5 valeurs de a possibles.(Afficher les résultats obtenus sur votre copie).
   d. En déduire une conjecture concernant l'ordre modulo 7 de tous les entiers a compris entre 2 et 6.

3. Soit a un entier naturel non divisible par 7.
   a. Montrer que : $a^6 \equiv 1(7)$.
   b. Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k vérifie $a^r \equiv 1(7)$.
   En déduire que k divise 6.
   Quelles sont les valeurs possibles de k ?
   c. Retrouver par le calcul l'ordre modulo 7 de tous les entiers a compris entre 4 et 6.

4. À tout entier naturel n, on associe le nombre $A_n = 2^n+3^n+4^n+5^n+6^n$.
   Montrer que $A_{2013} \equiv 6(7)$.